Cuprins

Introducere

Subiectul acestei teze de doctorat s-a iniţiat ca reflex la analiza multor lucrări ştiinţifice referitoare la probleme la limită semiliniare şi cvasiliniare, scrise de autori români şi străini.

Actualitatea temei investigate constă în faptul că studiul problemelor semiliniare şi cvasiliniare a fost şi rămâne un proces deschis mai ales din privinţa faptului că un număr important de procese din ştiinţele aplicate sunt modelate prin acestea iar dezvoltarea generală ne oferă noi perspective şi modalităţi de cercetare.

Obiectivul ştiinţific al acestei teze este: extinderea rezultatelor unor studii precedente din perspectiva următoarelor şapte direcţii:

a) Determinarea de condiţii suficiente pentru existenţa a cel puţin o soluţie în studiul problemei eliptice cvasiliniare

$$-\Delta_p u = a(x)f(u) \text{ în } R^N,\ u\,(x) > 0 \text{ pentru } x \in R^N,\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\rightarrow} 0. \qquad (P1)$$

b) Stabilirea unor rezultate de ne-existenţă a soluţiilor cu simetrie radială pentru problema cvasiliniară

$$-\Delta_p u = a(\,|x|\,)[f(u) + g(u) + |\nabla u|^q] \text{ în } R^N,\ u > 0 \text{ în } R^N,\ u(\,|x|\,) \overset{|x|\to\infty.}{\rightarrow} 0. \qquad (P2)$$

c) Ce metode s-ar mai putea folosi în obţinerea de soluţii pentru problema eliptică semiliniară

$$-\Delta u + c(x)u^{-1}\,|\nabla u|^2 = a(x) \text{ în } \ \Omega \subseteq R^N,\ u(x) > 0 \text{ pentru } x \in \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = 0. \qquad (P3)$$

d) Determinarea de condiţii suficiente pentru existenţa a cel puţin unei soluţii în cazul problemei eliptice semiliniare

$$-\Delta u + c(x)u = a(x)f(u) \text{ în } \Omega \subseteq R^N,\ u(x) > 0 \text{ pentru } x \in \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = 0. \qquad (P4)$$

e) Obţinerea unor rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru problema eliptică semiliniară

$$-\Delta u = \lambda a(x)\,(g(u) - |\nabla u|^q) \ \text{ în } \Omega \subseteq R^N,\ u(x) > 0 \text{ pentru } x \in \Omega, u_{|\partial\Omega} = 0. \qquad (P5)$$

f) Ce rezultate s-ar mai putea obţine extinzând studiul soluţiilor pentru problema eliptică cvasiliniară

$$\Delta_p u = g(u) \text{ în } \Omega \subset R^N,\ u(x) > 0 \text{ pentru } x \in \Omega,\ \ u_{|\partial\Omega} = \infty. \qquad (P6)$$

g) Se poate stabili existenţa a cel puţin unei soluţii pentru problema eliptică cvasiliniară

$$\Delta_p u = b(x)f(u) \text{ în } \Omega \subseteq R^N,\ u(x) > 0 \ \text{ pentru } x \in \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = \infty? \qquad (P7)$$

În concordanţă cu obiectivul ştiinţific, teza a fost organizată pe 7 capitole:

În primul capitol, vom extinde rezultatele de existenţă şi comportamentul asimptotic al soluţiilor obţinute de Goncalves şi Santos [67] în cazul $p = 2$ pentru problema (*P1*) la cazul mai general $1 < p < N$. În obţinerea rezultatelor folosim rezultate de existenţă obţinute de autorii Diaz şi Saa [48] precum şi rezultate de regularitate a soluţiilor pentru operatori cvasiliniari obţinute de către DiBenedetto [41] şi Tolksdorf [132].

În capitolul doi, dăm un răspuns problemei deschise pusă de Xue şi Zhang [137] în privinţa ne-existenţei soluţiilor problemei (*P2*).

Al treilea capitol, este important datorită faptului că în el sunt folosite argumente noi prin care se pot extinde rezultatele de existenţă pentru problema (*P3*) la funcţii neliniare mai generale.

Capitolul patru, sugerează posibilităţi de obţinere a rezultatelor de existenţă pentru probleme în care funcţionala neliniară nu depinde de termenul gradient pornind de la tratarea problemelor în care funcţionala liniară depinde de termenul gradient.

În capitolul cinci, stabilim rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru problema (*P5*). Extindem aici rezultatele obţinute de Dinu în referinţa [46].

În capitolul şase, îmbunătăţim rezultatele de existenţă obţinute de către Matero [104] pentru problema (*P6*). Raţionamentul demonstraţiei îşi are originea în lucrarea [43] aparţinând autorilor Dumont, Dupaigne, Goubet şi Rădulescu.

Capitolul al şaptelea se „înseriază“ după capitolele precedente pentru a aduce informaţii cu privire la rezultatele de existenţă obţinute în cazul problemei (*P7*). În obţinerea rezultatelor se utilizează lucrarea autorilor Mohammed [111] şi Tao şi Zhang [131].

Precizăm că o bună parte dintre rezultatele cuprinse în teză au fost expuse, discutate şi analizate în "Seminarul de Analiză Matematică şi Aplicaţii în Teoria Controlului" de la Universitatea de Vest din Timişoara, condus de prof. univ. dr. Mihail Megan. Unele au fost deja publicate în reviste de specialitate din ţară şi străinătate.

Cu sinceritate şi recunoştinţă mulţumesc distinşilor profesori universitari Ioan A. Rus (Universitatea „Babeş-Bolyai” din Cluj-Napoca), Teodor Precupanu (Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi) şi Petre Preda (Universitatea de Vest din Timişoara) pentru amabilitatea de a accepta calitatea de referent la această teză precum şi pentru observaţiile deosebit de utile pe care le-au făcut asupra conţinutului ei.

În încheiere doresc să adresez sincere mulţumiri profesorului universitar doctor Mihail Megan, conducătorul ştiinţific al tezei, pentru încrederea pe care mi-a acordat-o, pentru înţelegere, ajutorul şi grija cu care m-a încurajat în perioada activităţii de doctorand.

Capitolul 1

Rezultate de existenţă a soluţiilor şi comportamentul lor asimptotic pentru o problemă cvasiliniară de tip Lane, Emden şi Fowler

1.1 Introducere

Scopul studiului din prezentul capitol, este acela de a obţine rezultate de existenţă pentru problema eliptică cvasiliniară

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)f(u) & \text{în } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 & \text{când } \ |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

unde $N > 2$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ este operatorul p-Laplacian, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ iar $f \in Lip_{loc}((0, \infty))$. Notaţia $|\cdot|$ va reprezenta norma Euclidiană în $\mathbb{R}^N$ iar $f \in Lip_{loc}((0, \infty))$ înseamnă că $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este o funcţie continuă local Lipschitz.

Reamintim că o funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ se numeşte local Lipschitz dacă pentru orice $x \in (0, \infty)$ există o vecinătate V a lui x şi o constantă pozitivă $L = L(V)$ depinzând de V astfel încât $|f(z) - f(y)| \leq L\,|z - y|$ pentru orice $z, y \in V$.

O soluţie a problemei (1.1.1) va fi o funcţie $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ care, pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ cu $\varphi\,(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N$, verifică

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u(x)) \varphi(x) dx, \tag{1.1.2}$$

şi $u(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ iar $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Dificultăţile în stabilirea rezultatelor de existenţă a soluţiilor pentru probleme de tipul (1.1.1) apar când f este o funcţie singulară în 0, caz echivalent cu $\lim_{r\to 0+} f(r) = \infty$.

Asupra acestui caz vom insista în continuare.

Probleme eliptice semiliniare, în care funcţia f este singulară în 0, au fost intens studiate de mai mulţi autori: Wong [143], Crandall, Rabinowitz şi Tartar [36], Kusano şi Swanson [84], [85], Dalmasso [38], Edelson [50], Chabrowski şi König [20], Lazer şi McKenna [95], Shaker [127], Lair şi Shaker [88], Lair şi Shaker [89], Zhang [139], Shi şi Miaoxin [128], Cîrstea şi Rădulescu [18], Yjing şi Shujie [135], Feng şi Liu [56], Dinu [45], Goncalves şi Santos [67], Zhang [140]. Datorită volumului foarte mare de lucrări în această direcţie vom menţiona câteva din rezultatele recent obţinute urmând ca pe parcursul tezei să reamintim şi alte rezultate în această direcţie strict legate de problemele studiate.

Lair şi Shaker [88] au considerat problema (1.1.1) în cazul $p = 2$, $f(u(x)) = u^{-\gamma}(x)$, $(\gamma > 0)$ şi în ipoteza că funcţia $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface următoarele proprietăţi:

$(LS1)$ $a \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, unde exponentul $\alpha \in (0, 1)$;

$(LS2)$ $a(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$;

$(LS3)$ pentru $\Phi(r) = \max_{|x|=r} a(x)$ avem $\int_0^\infty r\Phi(r)dr < \infty$;

$(LS4)$ pentru $\varepsilon \in (0, 1)$ avem $\lim_{r\to\infty} r^{N-\varepsilon}\Phi(r) < \infty$.

Ei au arătat că ipotezele (LS1)-(LS3) sunt suficiente pentru ca problema (1.1.1) să aibă o unică soluţie $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ şi în plus, dacă Φ satisface (LS4) atunci comportamentul asimptotic al soluţiei este dat de

$$u(x) = O(|x|^{(-N+2+\varepsilon)/(1+\gamma)}) \ \textit{când} \ |x| \to \infty,$$

unde $0 < \varepsilon << 1$. Mai mult, ei au arătat că (LS3) este necesară şi suficientă în studiul soluţiilor cu simetrie radială, în sensul că dacă $a : \mathbb{R}^N \to (0, \infty)$ este o funcţie continuă, cu simetrie radială şi cu proprietatea

$$\int_0^\infty ra(r)dr = \infty,$$

atunci problema (1.1.1) nu are soluţii pozitive cu simetrie radială.

După aceste rezultate, Zhang [139] a remarcat că rezultatele de existenţă, ne-existenţă şi unicitate obţinute de Lair şi Shaker [88] rămân adevărate sub aceleaşi presupuneri asupra lui a dar $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este o funcţie de clasă C^1 îndeplinind

$(Z1)$ $f'(s) < 0$ şi $\lim_{s\to 0+} f(s) = \infty$.

Cîrstea şi Rădulescu [18] continuă studiul existenţei şi unicităţii soluţiei problemei (1.1.1) tot în cazul $p = 2$ şi arată că problema (1.1.1) admite o unică soluţie pozitivă

$u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ în ipotezele că a satisface (LS1)-(LS3) iar funcţia neliniară $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este de clasă C^1 şi satisface următoarele proprietăţi:

$(CR1)$ există $A > 0$ astfel încât $f(s) \leq A$ pentru orice $s > 1$;

$(CR2)$ $\lim_{s\to\infty} f(s)/s = 0$;

$(CR3)$ există $\beta > 0$ astfel încât $s \to \frac{f(s)}{s+\beta}$ este strict descrescătoare.

Mai mult, ei arată că şi în acest caz condiţia (LS3) este necesară şi suficientă.

Sun şi Li [135], pentru $p = 2$, extinde studiul unicităţii, existenţei şi ne-existenţei soluţiilor problemei (1.1.1) la funcţii de forma $f(u) = u^{-\gamma} + u^{\lambda}$ cu $\gamma > 0$ şi $\lambda \in (0, 1)$ îmbunătăţind parţial rezultatele din [18].

Pentru cazul general în care operatorul clasic Δ este înlocuit de Δ_p (vezi cartea [76] pentru definirea detaliată a operatorului p-Laplacian), un prim răspuns privind unicitatea, existenţa şi ne-existenţa soluţiilor problemei (1.1.1) a fost dat de către Goncalves şi Santos [66]. Ei au considerat problema (1.1.1) sub ipotezele că $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ este o funcţie cu simetrie radială ce satisface

$$
\begin{aligned}
0 &< \int_1^{\infty} r^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(r)dr < \infty \quad \textit{dacă } 1 < p \leq 2,\\
0 &< \int_1^{\infty} r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(r)dr < \infty \quad \textit{dacă } 2 \leq p < \infty\,,
\end{aligned}
$$

iar $f \in C^1((0, \infty), (0, \infty))$ este o funcţie singulară în 0 îndeplinind proprietăţile:

$(GS1)$ $s \longmapsto f(s)/s^{p-1}$ *este strict descrescătoare;*

$(GS2)$ $\lim_{s\to\infty} f(s)/s^{p-1} = 0$;

$(GS3)$ $\liminf_{s\to 0} f(s) > 0$,

arătând că problema (1.1.1) are o soluţie cu simetrie radială în $C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ şi în plus soluţia este unică când există $b > 0$ astfel încât $s \longmapsto f(s)/(s + b)^{p-1}$ este strict descrescătoare.

În privinţa existenţei şi comportamentului asimptotic al soluţiilor fără simetrie radială pentru problema (1.1.1), dar în cazul $p = 2$, rezultatele precedente sunt îmbunătăţite din nou de Gongalves şi Santos în referinţa [67]. Ei au generalizat rezultatele predecesorilor sub presupunerea că funcţia $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface (LS1)-(LS3) iar funcţia neliniară $f \in Lip_{loc}((0, \infty))$ îndeplineşte $(GS1), (GS2)$ şi în plus

$$(GS4) \quad \lim_{s\to 0+} f(s)/s^{p-1} = \infty,$$

condiţii suficiente pentru existenţa unei soluţii pozitive a problemei (1.1.1). Astfel că este firesc obiectivul propus în introducerea prezentei teze în privinţa problemei (1.1.1).

Vom considera cazul $1 < p < N$, caz motivat de aplicaţiile practice în care operatorul p-Laplacian apare, spre exemplu, în teoria fluidelor ne-Newtoniene.

Constanta p reprezintă caracteristica mediului. Cazul $1 < p < 2$ corespunde fluidelor pseudoplastice iar cazul $p > 2$ apare în fluidele dilatante (vezi [47, 49, 121, 129] pentru mai multe detalii).

Rezultatele principale obţinute în prezentul capitol se aplică clasei de funcţii $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ce satisfac următoarele proprietăţi:

$(A1)$ $a \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, unde exponentul $\alpha \in (0,1)$;

$(A2)$ $a(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$;

$(A3)$ pentru $\Phi(r) = \max_{|x|=r} a(x)$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty r^{1/(p-1)}\Phi^{1/(p-1)}(r)dr &< \infty \quad \textit{dacă } 1 < p \leq 2, \\ \int_1^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}\Phi(r)dr &< \infty \quad \textit{dacă } 2 \leq p < N, \end{aligned}$$

şi funcţiilor neliniare $f \in Lip_{loc}((0,\infty))$ ce îndeplinesc următoarele condiţii:

$$\begin{array}{ll} (F1) & u \longmapsto f(u)/u^{p-1} \quad \textit{este strict descrescătoare pe } (0,\infty); \\ (F2) & \lim\limits_{u \searrow 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty \qquad \textit{şi } \lim\limits_{u \nearrow \infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0. \end{array}$$

Următoarea secţiune are un caracter preliminar şi este necesară abordării rezultatelor principale ale capitolului.

1.2 Rezultate preliminare

Prezentăm câteva rezultate privind problema de valori proprii pentru p-Laplacian.

Fie Ω un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă.

Definiţia 1.2.1 *Vom spune că $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie, dacă există o funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \neq 0$, astfel încât să avem $u = 0$ pe $\partial\Omega$ şi*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \eta(x) dx = \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) \eta(x) dx \ , \tag{1.2.1}$$

pentru orice $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ cu $\eta(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$.

Definiţia 1.2.2 *Funcţia u ce intervine în (1.2.1) se numeşte funcţie proprie asociată valorii proprii λ.*

În cazul $p = 2$, problema (1.2.1) a fost considerată pentru prima dată în anul 1860 de către Hermann von Helmholtz şi a făcut obiectul studiului unor probleme de acustică.

O primă observaţie privind problema (1.2.1) este:

Remarca 1.2.1 *Dacă* (u, λ) *este o soluţie a problemei (1.2.1) atunci pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$ *cuplul* $(\alpha u, \lambda)$ *reprezintă de asemenea o soluţie.*

Pentru $1 < p < \infty$ existenţa lui λ şi u a fost considerată de către Garcia Azorero şi Peral Alonzo [60]. Ei au arătat că există un şir crescător de valori proprii strict pozitive $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ astfel încât $\lambda_k \to \infty$ pentru $k \to \infty$.

Este cunoscut că prima valoare proprie ce intervine în (1.2.1) este

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \,|u \in W_0^{1,p}(\Omega), \;\; u \not\equiv 0 \right\} > 0,$$

şi că funcţiile proprii asociate lui λ_1 realizează minimumul funcţionalei Euler

$$J(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{\lambda_1}{p} \int_\Omega |u|^p \, .$$

Se poate consulta spre exemplu cartea lui Jebelean [77].

Lindqvist [99, 100] a obţinut următoarea caracterizare pentru prima valoare proprie λ_1 şi pentru funcţiile proprii asociate ei:

Lema 1.2.1 *În orice domeniu mărginit* Ω *al lui* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ *are loc:*

i) λ_1 *este simplă, în sensul că dacă* u, v *sunt funcţii proprii asociate lui* λ_1 *atunci există o constantă* c *astfel încât* $u = cv$*;*

ii) funcţiile proprii asociate lui λ_1 *au semn constant, în sensul că* $u > 0$ *în* Ω *sau* $u < 0$ *în* Ω*;*

iii) λ_1 *este izolată, în sensul că există* $\delta > 0$ *astfel ca în intervalul* $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ *nu există alte funcţii proprii asociate;*

iv) funcţia proprie strict pozitivă asociată lui λ_1 *este unică (după multiplicarea cu o constantă).*

Primele rezultate în această direcţie au fost obţinute de Anane [4, 5], Barles [11] şi Sakaguchi [126]. Cărţile lui Peral [118] şi respectiv Gasiński şi Papageorgiou [61] se vor dovedi utile în studiul problemelor de valori proprii.

Notăm, în capitol, prin φ_1 funcţia proprie strict pozitivă corespunzătoare valorii proprii λ_1 pentru problema (1.2.1). Condiţia de regularitate impusă frontierei $\partial\Omega$ implică:

Lema 1.2.2 *(vezi [97]) Dacă* $\lambda := \lambda_1$ *în (1.2.1) atunci există* $\alpha \in (0, 1)$ *astfel încât* $\varphi_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

Primul rezultat de $C^{1,\alpha}-$regularitate al funcţiilor proprii corespunzătoare lui λ_1 pentru problema (1.2.1) este datorat lui Barles [11].

În continuare prezentăm un rezultat de existenţă datorat lui Diaz şi Saà [48] ce reprezintă instrumentul de bază în obţinerea rezultatelor principale.

Lema 1.2.3 *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă. Presupunem că $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ este astfel încât:*

$H1)$ pentru a.p.t. $x \in \Omega$, funcţia $u \mapsto g(x,u)$ este continuă pe $[0,\infty)$ şi funcţia $u \mapsto g(x,u)/u^{p-1}$ este descrescătoare în $(0,\infty)$;

$H2)$ pentru fiecare $u \geq 0$, funcţia $x \to g(x,u)$ aparţine lui $L^\infty(\Omega)$;

$H3)$ $\exists C > 0$ astfel încât $g(x,u) \leq C(u^{p-1}+1)$ a.p.t. $x \in \Omega$, $\forall\ u \geq 0$.

În aceste ipoteze, problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u) & \text{în } \Omega \\ u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

are cel mult o soluţie u. Dacă, în plus,

$$a_0(x) = \lim_{r\searrow 0} \frac{g(x,s)}{s^{p-1}} \quad \text{şi} \quad a_\infty(x) = \lim_{r\nearrow\infty} \frac{g(x,s)}{s^{p-1}},$$

sunt astfel încât

$$-\infty < a_0(x) \leq +\infty \quad \text{şi} \ -\infty \leq a_\infty(x) < +\infty$$

atunci soluţia există şi $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Mai mult $u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Avem nevoie de inegalitatea lui Diaz-Saà [48] care într-o formă mai generală poate fi consultată în [21].

Lema 1.2.4 *Fie Ω o mulţime deschisă. Pentru $i = 1,2$ fie $w_i \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $w_i > 0$ a.p.t. în Ω, $\Delta_p w_i^{1/p} \in L^\infty(\Omega)$ şi $w_1 = w_2$ pe $\partial\Omega$. Dacă*

$$\frac{w_i}{w_j} \in L^\infty(\Omega),\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

atunci

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}} \right) (w_1 - w_2)\, dx \geq 0.$$

În cazul $p = 2$ rezultatele din *Lemele 1.2.3, 1.2.4* sunt datorate lui Brezis şi Oswald [14].

Următoarea lemă a fost dedusă de Sakaguchi [126].

Lema 1.2.5 *(vezi şi [118]) Dacă Ω este un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă iar pentru orice $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ cu $\eta(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$, funcţia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface proprietăţile:*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla \eta(x)\, dx \geq 0,\ \ u > 0 \text{ în } \Omega,\ \ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega,$$

atunci $\partial u / \partial n < 0$ pe $\partial\Omega$.

Pentru $p = 2$, *Lema 1.2.5* a fost obţinută de către Hopf [73].

Vom folosi în demonstraţii principiul tare de maxim al lui Vazquez [134].

Lema 1.2.6 *Fie Ω un domeniu al lui $\mathbb{R}^N$ şi $u \in C^1(\Omega)$ astfel încât $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ a.p.t. în Ω, $u \neq 0$, $\Delta_p u \leq \beta(u)$ a.p.t. în Ω, $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este continuă, crescătoare, $\beta(0) = 0$ şi există $s > 0$ astfel încât $\beta(s) = 0$ sau $\beta(s) > 0$ pentru orice $s > 0$ dar*

$$\int_0^1 (j(S))^{-1/p} dS = \infty \text{ unde } j(S) = \int_0^S \beta(t) dt.$$

În aceste ipoteze, dacă u nu este identic zero pe Ω atunci ea este strict pozitivă în Ω.

Următorul rezultat stabileşte regularitatea soluţiei determinată în prezentul capitol. Se regăseşte într-o formă mai generală în lucrarea autorului DiBenedetto [41]. În această direcţie se pot consulta şi rezultatele obţinute de Tolksdorf [132, 133] şi respectiv Lieberman [98].

Lema 1.2.7 *Fie $N \geq 2$, $p \in (1, \infty)$, Ω o mulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^N$ şi Ω' o submulţime a lui Ω astfel încât $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Presupunem că $b : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este măsurabilă în $x \in \Omega$, continuă în $u \in \mathbb{R}$ şi există $\gamma > 0$ astfel încât $|b(x, u)| \leq \gamma$. Dacă $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ verifică*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla \psi(x)\, dx = \int_\Omega b(x, u(x))\, \psi(x)\, dx,$$

pentru orice $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ cu supp$\psi \subset \Omega$, atunci $|\nabla u| \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ şi pentru orice submulţime compactă $K \subset \Omega'$, există $\alpha \in (0, 1)$ şi constantele $C_0, C_1 > 0$ depinzând de N, p, $M = ess \sup_{\Omega'} |u|$, $\gamma(M)$ şi $dist(K, \partial\Omega')$, astfel încât

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq C_0 \ \text{ şi } \ |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C_1 |x - y|^\alpha, \quad x, y \in K. \tag{1.2.3}$$

Următoarea lemă poate fi consultată în [83].

Lema 1.2.8 *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$. Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există domeniile mărginite Ω_k astfel încât*

i) frontiera $\partial\Omega_k$ este de clasă C^∞; ii) $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$; iii) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$.

Suntem în măsură să enunţăm şi demonstrăm rezultatele principale din prezentul capitol referitor la problema (1.1.1). Ele sunt publicate în [29].

1.3 Rezultate principale

Pentru a putea extinde metoda perturbării folosită de Crandall, Rabinowitz şi Tartar [36], Chabrowski şi König [20], Goncalves, Santos şi Maia [65], Goncalves şi Santos [67] în cazul studiului nostru este necesar să obţinem următorul rezultat:

Teorema 1.3.1 *Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o funcţie satisfăcând (A1), (A2) iar $f \in Lip_{loc}((0,\infty))$ îndeplinind proprietăţile (F1)-(F2) atunci pentru orice $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ cu $\psi(x) \geq 0$ problema*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla\psi(x)\, dx = \int_\Omega a(x) f(u(x)+\varepsilon)\psi(x)\, dx, \\ u > 0 \text{ în } \Omega,\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

are o unică soluţie $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ astfel încât $u_\varepsilon > 0$ în Ω, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} < 0$ în Ω şi

i) $u_\varepsilon + \varepsilon \leq u_\delta + \delta$ pentru $\delta > \varepsilon$;

ii) există $c_0 := c_{0,\Omega} > 0$ cu $c_0\varphi_1 \leq u_\varepsilon + \varepsilon$ în Ω unde $\varphi_1 := \varphi_{1,\Omega} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ este funcţia proprie corespunzătoare primei valori proprii λ_1 pentru problema (1.2.1).

Demonstraţie: *Existenţa şi unicitatea soluţiei.* Arătăm că există o unică soluţie pentru problema (1.3.1). Pentru aceasta este suficient să probăm că ipotezele formulate de Diaz-Saà din *Lema 1.2.3* sunt îndeplinite.

$H1:$ Deoarece $f \in Lip_{loc}(0,\infty)$ şi $\varepsilon > 0$, rezultă că funcţia $u \mapsto a(x)f(u+\epsilon)$ este continuă în $[0,\infty)$ iar din

$$a(x)\frac{f(u+\varepsilon)}{u^{p-1}} = a(x)\frac{f(u+\varepsilon)}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \cdot \frac{(u+\epsilon)^{p-1}}{u^{p-1}},$$

folosind pozitivitatea lui a şi (F1) deducem că funcţia

$$u \longmapsto a(x)\frac{f(u+\varepsilon)}{u^{p-1}}$$

este descrescătoare pe $(0,\infty)$.

*H*2 : Pentru orice $u \geq 0$, deoarece $a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, obţinem că $x \mapsto a(x)f(u)$ aparţine lui $L^{\infty}(\Omega)$.

*H*3 : Din faptul că

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(u+\varepsilon)}{u^{p-1}+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u+\varepsilon)}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\cdot\frac{(u+\varepsilon)^{p-1}}{u^{p-1}+1}=0$$

şi $f \in Lip_{loc}((0,\infty))$, obţinem că există $C_1 > 0$ astfel încât

$$f(u+\varepsilon)\leq C_1(u^{p-1}+1)\ \forall\ u\geq 0.$$

Mai mult,

$$a(x)f(u+\varepsilon)\leq \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}C_1(u^{p-1}+1)\ \forall\ u\geq 0,$$

şi deci $C := C_1\,\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}$.

De asemenea, observăm că

$$a_0(x)=\lim_{u\searrow 0}\frac{a(x)f(u+\varepsilon)}{u^{p-1}}=+\infty \quad \textit{şi} \quad a_{\infty}(x)=\lim_{u\to+\infty}\frac{a(x)f(u+\varepsilon)}{u^{p-1}}=0.$$

În concluzie ipotezele lui Diaz şi Saà sunt îndeplinite, şi în consecinţă conform *Lemei 1.2.3* problema (1.3.1) are o unică soluţie u_ε astfel încât $u_\varepsilon > 0$ în Ω şi $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$.

În fapt, Diaz şi Saà au demonstrat că soluţia u_ε este un punct critic al funcţionalei energie

$$J_p(u_\varepsilon(x))=\int_\Omega[\frac{1}{p}\left|\nabla u_\varepsilon(x)\right|^p-\int_0^{u_\varepsilon(x)}a(x)f(s+\varepsilon)ds]dx,$$

adică ea satisface

$$\int_\Omega\left|\nabla u_\varepsilon(x)\right|^{p-2}\nabla u_\varepsilon(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx=\int_\Omega a(x)f(u_\varepsilon(x)+\varepsilon)\psi(x)\,dx, \tag{1.3.2}$$

pentru orice $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ cu $\psi \geq 0$ în Ω.

Verificarea afirmaţiei $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} < 0$ *pe* $\partial\Omega$. Observăm din *Lema 1.2.3* că $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ şi deci *Lema 1.2.5* implică $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} < 0$ pe $\partial\Omega$. Un argument standard arată că există o constantă strict pozitivă μ astfel încât $\mu d(x) \leq u_\varepsilon(x)$ pentru orice $x \in \Omega$, unde prin $d(x)$ se notează distanţa de la punctul x la $\partial\Omega$ (vezi de exemplu Goncalves şi Santos [68]).

Verificarea afirmaţiei i). Considerăm mulţimea $B_{\varepsilon,\delta}=\{x\in\Omega\,|u_\varepsilon(x)+\varepsilon>u_\delta(x)+\delta\}$. Este suficient să arătăm că $B_{\varepsilon,\delta}=\varnothing$. Pentru a încheia demonstraţia, notăm că $B_{\varepsilon,\delta}\subset\Omega$ este o mulţime deschisă şi, în fapt, $B_{\varepsilon,\delta}\subset\subset\Omega$.

Presupunem contrariul, că $B_{\varepsilon,\delta} \neq \varnothing$ şi fie $w_1 := (u_\varepsilon + \varepsilon)^p$ *şi* $w_2 := (u_\delta + \delta)^p$.

Aplicând *Lema 1.2.4* avem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_{\varepsilon,\delta}} \left(\frac{-\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}} \right) (w_1 - w_2)\, dx \\ &= \int_{B_{\varepsilon,\delta}} \left[\frac{-\Delta_p (u_\varepsilon + \varepsilon)}{(u_\varepsilon + \varepsilon)^{p-1}} + \frac{\Delta_p (u_\delta + \delta)}{(u_\delta + \delta)^{p-1}} \right] [(u_\varepsilon + \varepsilon)^p - (u_\delta + \delta)^p]\, dx \qquad (1.3.3) \\ &= \int_{B_{\varepsilon,\delta}} a(x) \left[\frac{f(u_\varepsilon + \varepsilon)}{(u_\varepsilon + \varepsilon)^{p-1}} - \frac{f(u_\delta + \delta)}{(u_\delta + \delta)^{p-1}} \right] [(u_\varepsilon + \varepsilon)^p - (u_\delta + \delta)^p]\, dx < 0, \end{aligned}$$

fapt ce reprezintă o contradicţie, datorată lui (F1). Aceasta demonstrează i).

Verificarea afirmaţiei ii). Fie $c > 0$ un parametru real şi mulţimea $B_{c,\varepsilon} := \{x \in \Omega \,|\, c\varphi_1(x) > u_\varepsilon(x) + \varepsilon\}$.

Este suficient să arătăm că există $c_0 > 0$ astfel încât $B_{c_0,\varepsilon} = \varnothing$. Desigur, $B_{c,\varepsilon} \subset \Omega$ este deschis şi, în fapt, $B_{c,\varepsilon} \subset\subset \Omega$.

Alegem $w_1 = (c\varphi_1)^p$ şi $w_2 := (u_\varepsilon + \varepsilon)^p$ în *Lema 1.2.4*. Din (F1) găsim, estimând ca în (1.3.3) că

$$0 \leq \int_{B_{c,\varepsilon}} \left(\lambda_1 - a(x) \frac{f(c\,\|\varphi_1\|_{L^\infty})}{c\,\|\varphi_1\|_{L^\infty}^{p-1}} \right) [(c\varphi_1)^p - (u_\varepsilon + \varepsilon)^p]\, dx. \qquad (1.3.4)$$

Din (F2) proprietăţile lui λ_1 şi φ_1, enunţate pentru problema (1.2.1), deducem că există o constantă pozitivă $c_0 := c_{0,\Omega}$ (care nu depinde de ε) astfel încât

$$\lambda_1 - a(x) \frac{f(c\,\|\varphi_1\|_{L^\infty})}{(c\,\|\varphi_1\|_{L^\infty})^{p-1}} < 0.$$

Această inegalitate, (1.3.4) şi definiţia lui $B_{c,\varepsilon}$ arată că $B_{c_0,\varepsilon} = \varnothing$.

Demonstraţia *Teoremei 1.3.1* este completă. ■

Suntem în măsură să studiem direct problema (1.1.1).

Teorema 1.3.2 *Dacă $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ este o funcţie satisfăcând (A1)-(A3) iar $f \in Lip_{loc}((0,\infty))$ îndeplinind proprietăţile (F1)-(F2) atunci problema (1.1.1) are cel puţin o soluţie $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$. În plus, dacă există $\mu \in (p, N)$ astfel încât*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\mu/(p-1)}\, \Phi^{1/(p-1)}(|x|) < \infty, \qquad (1.3.5)$$

atunci

$$u(x)^p [f(u(x)/4) 2^{p-1} + 1]^{-1/(p-1)} = O(|x|^{\frac{p-\mu}{p-1}}) \text{ când } |x| \to \infty. \qquad (1.3.6)$$

Demonstraţie: Alegem un întreg $k \geq 1$. Notăm prin B_k bila de rază k şi centru 0. Cum B_k este o bilă rezultă că există mulţimile mărginite Ω_i cu frontiera de clasă C^∞ (suficient de netedă) astfel încât

$$\overline{\Omega_i} \subset \Omega_{i+1} \subset B_k \textit{ pentru orice } i \in \mathbb{N} \textit{ şi } B_k = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Punem $\varepsilon = 1/n$, $u^n := u_{1/n}$ şi $\Omega := B_k$ în (1.3.1). Conform *Teoremei 1.3.1* există o unică soluţie $u^n \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega_i}\right)$ a lui (1.3.1) astfel încât

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} |\nabla u^n(x)|^{p-2} \nabla u^n(x) \cdot \nabla \xi(x)\, dx &= \int_{\Omega_i} a(x) f(u^n(x) + \frac{1}{n}) \xi(x)\, dx, \\
u^n &> 0 \textit{ în } \Omega_i, \\
u^n &= 0 \textit{ pe } \partial\Omega_i,
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

pentru orice $\xi \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $\xi \geq 0$ în Ω_i şi supp$(\xi) \subset \Omega_i$.

Din *Lema* 1.2.7 vedem că există $\alpha \in (0,1)$ şi constantele C_0, $C_1 > 0$ astfel încât

$$|\nabla u^n(x)|_{L^\infty} \leq C_0 \text{ şi } |\nabla u^n(x) - \nabla u^n(y)| \leq C\, |x-y|^\alpha,\ x, y \in \overline{\Omega}_i\ i = 1, 2, ...$$

Atunci şirul $\{u^n\}$ este mărginit în $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$. Deoarece, scufundarea

$$\text{a lui } C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1) \text{ în } C^1(\overline{\Omega}_1),$$

este compactă există un subşir al lui $\{u^n\}$ notat prin $\{u_1^{n_{1,j}}\}_{j=1,2,...}$ cu $n_{1j} \to \infty$ pentru $j \to \infty$ astfel încât

$$u_1^{n_{1,j}} \overset{n_{1j}\to\infty}{\to} u_1 \textit{ în } C^1(\overline{\Omega}_1) \textit{ şi } u_1 > 0 \textit{ în } \Omega_1,$$

respectiv

$$\left|\nabla u_1^{n_{1,j}}\right|^{p-2} \nabla u_1^{n_{1,j}} \overset{n_{1j}\to\infty}{\longrightarrow} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \textit{ în } C(\overline{\Omega}_1).$$

Avem din teorema convergenţei dominate (vezi cartea lui Niculescu [113] ori Micu [109]) că

$$\int_{\Omega_1} \left|\nabla u_1^{n_{1,j}}\right|^{p-2} \nabla u_1^{n_{1,j}} \nabla \varphi(x) dx \overset{n_{1,j}\to\infty}{\to} \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi(x) dx,$$

şi

$$\int_{\Omega_1} a(x) f(u_1^{n_{1,j}} + 1/n_{1,j}) \varphi dx \overset{n_{1,j}\to\infty}{\to} \int_{\Omega_1} a(x) f(u_1) \varphi dx.$$

Atunci

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega_1} a(x) f(u_1) \varphi dx,\ u_1 > 0 \textit{ în } \Omega_1. \tag{1.3.8}$$

Cum şirul $\{u_1^{n_{1,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ este mărginit găsim un subşir al său $\{u_2^{n_{2,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ astfel încât

$$u_2^{n_{2,j}} \overset{n_{2j}\to\infty}{\longrightarrow} u_2 \text{ în } C^1(\overline{\Omega}_2) \text{ şi } u_2 > 0 \text{ în } \Omega_2,$$

respectiv

$$\left|\nabla u_2^{n_{2,j}}\right|^{p-2} \nabla u_2^{n_{2,j}} \overset{n_{2j}\to\infty}{\longrightarrow} |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \text{ în } C(\overline{\Omega}_2).$$

În acelaşi mod ca în (1.3.8) vedem că

$$\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega_2} a(x) f(u_2) \varphi dx, \; u_2 > 0 \text{ în } \Omega_2.$$

Remarcăm că deoarece şirul $\{u_2^{n_{2,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ este un subşir al lui $\{u_1^{n_{1,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ avem $u_{2|\Omega_1} = u_1$.

Procedând inductiv, obţinem şirul $\{u_i^{n_{i,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ astfel încât

$$u_i^{n_{i,j}} \overset{n_{ij}\to\infty}{\longrightarrow} u_i \text{ în } C^1(\overline{\Omega}_i) \text{ şi } u_i > 0 \text{ în } \overline{\Omega}_i,$$

respectiv

$$\left|\nabla u_i^{n_{i,j}}\right|^{p-2} \nabla u_i^{n_{i,j}} \overset{n_{ij}\to\infty}{\longrightarrow} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \text{ în } C(\overline{\Omega}_i).$$

Cum $\{u_i^{n_{i,j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ este un subşir al şirului $\{u_{i-1}^{n_{(i-1),j}}\}_{j=1,2,\ldots}$ avem $u_{i_{|\Omega_{i-1}}} = u_{i-1}$ şi u_i verifică

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_i(x)|^{p-2} \nabla u_i(x) \cdot \nabla \xi(x)\, dx = \int_{\Omega_i} a(x) f(u_i(x)) \xi(x)\, dx. \tag{1.3.9}$$

Observăm că u_i satisface ecuaţia (1.3.9) pentru orice i şi cum $B_k = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ obţinem că u_i este o soluţie pentru (1.3.9) în B_k. Fie $u^k : B_k \to (0,\infty)$ definită prin $u^k(x) := u_i(x)$ pentru $x \in \Omega_i$. Atunci $u^k \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$, $u^k(x) > 0$ în B_k şi

iii) $u_i^{n_{i,j}} \overset{n_{i,j}\to\infty}{\longrightarrow} u^k$ în B_k;

iv) $u^k \geq c_{0,k}\varphi_1$ în B_k unde $\varphi_1 := \varphi_{1,B_k}$.

În plus u^k satisface

$$\int_{B_k} \left|\nabla u^k(x)\right|^{p-2} \nabla u^k(x) \cdot \nabla \xi(x)\, dx = \int_{B_k} a(x) f(u^k(x)) \xi(x)\, dx, \; u^k > 0 \text{ în } B_k. \tag{1.3.10}$$

Extindem u^k, cu zero, în afara lui B_k şi demonstrăm că

$$0 < u^k \leq u^{k+1} \text{ în } \mathbb{R}^N. \tag{1.3.11}$$

Inegalitatea $u^k > 0$ în $\mathbb{R}^N$ rezultă din *Lema 1.2.6* sau aplicând proprietatea iv) a şirului u^k. Pentru a demonstra cea de-a doua inegalitate, considerăm submulţimea deschisă a lui $\mathbb{R}^N$

$$B_{k,k+1} = \{x \in \mathbb{R}^N \left| u^k(x) > u^{k+1}(x) \right.\} \subset\subset B_k.$$

Alegând $w_1 := (u^k)^p$ *şi* $w_2 := (u^{k+1})^p$ în *Lema 1.2.4* obţinem

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{B_{k,k+1}} \left(\frac{-\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}} \right) (w_1 - w_2) dx \\
&= \int_{B_{k,k+1}} \left[\frac{-\Delta_p u^k}{(u^k)^{p-1}} + \frac{\Delta_p u^{k+1}}{(u^{k+1})^{p-1}} \right] [(u^k)^p - (u^{k+1})^p] dx \qquad (1.3.12)\\
&= \int_{B_{k,k+1}} a(x) \left[\frac{f(u^k)}{(u^k)^{p-1}} - \frac{f(u^{k+1})}{(u^{k+1})^{p-1}} \right] [(u^k)^p - (u^{k+1})^p] dx < 0,
\end{aligned}
$$

fapt care este imposibil.

Deci $u^k \leq u^{k+1}$ în B_k. Această inegalitate continuă să aibă loc în $B_{k+1} \backslash B_k$ deoarece

$$u^k = 0 \text{ în } B_{k+1} \backslash B_k \text{ şi } u^{k+1} > 0 \text{ în } B_{k+1} \backslash B_k. \qquad (1.3.13)$$

Până în acest moment cunoaştem că există $u(x) := \lim_{k\to\infty} u^k(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$. În pasul următor justificăm existenţa unei funcţii $v : \mathbb{R}^N \to (0, \infty)$, cu proprietăţile:

$$v \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}) \text{ şi } u^k \leq v \text{ în } \mathbb{R}^N.$$

Pentru început construim o funcţie continuă, mărginită, pozitivă şi cu simetrie radială

$$w \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}) \qquad (1.3.14)$$

astfel încât

$$
\begin{cases}
-\Delta_p w = \Phi(r), (r = |x|) & \text{în } \mathbb{R}^N \\
w\,(r) > 0 & \forall r > 0, \\
w(r) \to 0 & \text{când } r \to \infty.
\end{cases}
$$

Se cunoaşte din rezultatele autorilor Goncalves şi Santos [66] că

$$w(r) := K - \int_0^r \left[\xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1} \Phi(\sigma) d\sigma \right]^{1/(p-1)} d\xi,\ \ r > 0, \qquad (1.3.15)$$

unde

$$K := \int_0^{+\infty} \left[\xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1} \Phi(\sigma) d\sigma \right]^{1/(p-1)} d\xi < \infty,$$

este funcţia căutată. În pasul următor construim funcţia v. Pentru aceasta considerăm

$$\overline{\overline{f}}(y) = \left(\overline{f}(y) + 1\right)^{\frac{1}{p-1}}, y > 0 \qquad (1.3.16)$$

unde

$$\overline{f}(y) = \frac{y^p}{\displaystyle\int_0^y \frac{t^{p-1}}{f(t)} dt}.$$

Notăm că funcţia $\overline{\overline{f}}$ verifică următoarele proprietăţi:

$(F1')$ $\quad \overline{\overline{f}}(y) \geq f^{1/(p-1)}(y), y \mapsto \overline{\overline{f}}(y)/y^{p-1}$ este descrescătoare pe $(0, \infty)$;

$(F2')$ $\quad \lim_{y \searrow 0} \overline{\overline{f}}(y)/y = \infty$ şi $\lim_{y \nearrow \infty} \overline{\overline{f}}(y)/y = 0$.

Demonstrăm în cele ce urmează că putem alege funcţia v astfel încât

$$w(r) = \frac{1}{C} \int_0^{v(r)} t^{p-1}/\overline{\overline{f}}(t)\, dt,$$

unde C este o constantă pozitivă aleasă satisfăcând inegalitatea

$$KC \leq \int_0^{C^{1/(p-1)}} t^{p-1}/\overline{\overline{f}}(t)\, dt.$$

Pentru început, arătăm că putem găsi $C > 0$ cu această proprietate.

Din ipoteza (F2') obţinem că

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)}\, dt = +\infty.$$

Acum folosind regula lui L'Hôpital avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{p-1}} \int_0^x \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)} dt = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(p-1)\overline{\overline{f}}(x)} = +\infty.$$

Aceasta înseamnă că există $x_1 > 0$ astfel încât

$$\int_0^x \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)}\, dt \geq K x^{p-1},$$

pentru toţi $x \geq x_1$. Rezultă că pentru orice $C \geq x_1$,

$$KC \leq \int_0^{C^{1/(p-1)}} \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)} dt.$$

Pe de altă parte funcţia $\Gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definită prin relaţia

$$\Gamma(s) := \int_0^s t^{p-1}/\overline{\overline{f}}(t)\, dt,$$

este bijectivă şi $\Gamma(0) = 0$ fapt ce determină existenţa funcţiei $v : \mathbb{R}^N \to (0, \infty)$ definită implicit prin

$$v(r) := \Gamma^{-1}(w(r) \cdot C),$$

unde Γ^{-1} este inversa funcţiei Γ.

Cum w este o funcţie descrescătoare, rezultă că şi v este de asemenea descrescătoare (vezi (1.3.19)). Atunci

$$\int_0^{v(r)} \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)} dt \leq \int_0^{v(0)} \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)} dt = C \cdot w(0) = C \cdot K \leq \int_0^{C^{1/(p-1)}} \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)} dt. \tag{1.3.17}$$

Din relaţia (1.3.17) obţinem $v(r) \leq C^{1/(p-1)}$ oricare ar fi $r > 0$. Pe de altă parte $w(r) \to 0$ *pentru* $r \to +\infty$ implică

$$v(r) \to 0 \text{ când } r \to +\infty. \tag{1.3.18}$$

În continuare evaluăm $\Delta_p w$. Din alegerea lui v avem

$$\nabla w = \frac{1}{C} \cdot \frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \nabla v \tag{1.3.19}$$

şi

$$\Delta w = \frac{1}{C} \cdot \frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \Delta v + \frac{1}{C} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \right) \right]^2. \tag{1.3.20}$$

Folosind relaţiile (1.3.19) şi (1.3.20) obţinem după calcule

$$\Delta_p w = \frac{1}{C^{p-1}} \left(\frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \right)^{p-1} \Delta_p v + (p-1) \frac{1}{C^{p-1}} |\nabla v|^p \left(\frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \right)^{p-2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(v)} \right). \tag{1.3.21}$$

Acum, folosind (1.3.21) şi faptul că $y \mapsto \overline{\overline{f}}(y)/y^{p-1}$ este funcţie strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$ rezultă

$$\Delta_p v \leq C^{p-1} \left(\frac{\overline{\overline{f}}(v)}{v^{p-1}} \right)^{p-1} \Delta_p w = -C^{p-1} \left(\frac{\overline{\overline{f}}(v)}{v^{p-1}} \right)^{p-1} \Phi(r) \leq -f(v)\Phi(r). \tag{1.3.22}$$

Pentru a demonstra că $u^k \leq v$ în $\mathbb{R}^N$, considerăm $B_{k,v} := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, u^k(x) > v(x)\}$ şi presupunem, prin absurd, că $B_{k,v} \neq \varnothing$.

Aplicând inegalitatea lui Diaz-Saà cu $w_1 := (u^k)^p$ respectiv $w_2 := v^p$ şi estimând ca în (1.3.12) obţinem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_{k,v}} \left(\frac{-\Delta_p w_1^{1/p}}{w_1^{(p-1)/p}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/p}}{w_2^{(p-1)/p}} \right) (w_1 - w_2) dx \\ &= \int_{B_{k,v}} a(x) \left[\frac{f(u^k)}{(u^k)^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}} \right] [(u^k)^p - v^p] dx < 0, \end{aligned}$$

şi deci o contradicţie. Atunci $B_{k,v} = \varnothing$ şi

$$u^k \leq v \text{ în } \mathbb{R}^N. \tag{1.3.23}$$

Acum, ca o consecinţă a lui (1.3.11) şi (1.3.23), $u^k \overset{k\to\infty}{\to} u$ (punctual) în $\mathbb{R}^N$. Din monotonia şirului de funcţii $\{u^k\}$ deducem că $u > 0$ în $\mathbb{R}^N$ iar din (1.3.18) şi (1.3.23)

obţinem $u(x) \to 0$ când $|x| \to \infty$.

Rămâne să arătăm că u este soluţia problemei (1.1.1). Pentru aceasta considerăm mulţimea $O \subset\subset B_k$, în sensul că $\overline{O} \subset B_k$ şi $\overline{O}$ compactă. Fie $\theta \in C_0^\infty(O)$ cu $\theta \geq 0$ şi $supp\theta \subseteq O \subset\subset B_k$. Deoarece $u \in C^1(B_k) \cap L^\infty(B_k)$, a este continuă Hölder iar f este local Lipschitz continuă, rezultă

$$a(x)f(u^k(x)) \overset{k\to\infty}{\to} a(x)f(u(x)) \ pentru\ orice\ x \in O,$$

mai mult există $C_3, C_4 > 0$ astfel încât

$$\left|a(x)f(u^k) - a(x)f(u)\right| |\theta| \leq \|a(x)\|_{L^\infty(O)} \left|u^k - u\right| |\theta| \leq C_3 \left|C_4 - u\right| |\theta| \in L^1(O). \tag{1.3.24}$$

Relaţia (1.3.24) ne permite să aplicăm teorema convergenţei dominate pentru a obţine

$$\lim_{k\to\infty} \int_O \left|a(x)f(u^k) - a(x)f(u)\right| |\theta(x)|\, dx = \int_O \lim_{k\to\infty} \left|a(x)f(u^k) - a(x)f(u)\right| |\theta(x)|\, dx = 0,$$

fapt ce demonstrează

$$\int_O a(x)f(u^k(x))\theta(x)\, dx \overset{k\to\infty}{\to} \int_O a(x)f(u(x))\theta(x)\, dx. \tag{1.3.25}$$

Din *Lema 1.2.7* avem $\left|\nabla u^k\right|^{p-1} |\nabla\theta| \leq C_{00}^{p-1} |\nabla\theta|$ în $\overline{O}$ unde $C_{00} := \max_{x\in\overline{O}} \left|\nabla u^k\right|$. Folosind acum şi faptul că funcţia $t \to |t|^{p-2} t$ este continuă rezultă

$$\int_O \left|\nabla u^k\right|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\theta dx \overset{k\to\infty}{\to} \int_O |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\theta dx. \tag{1.3.26}$$

Combinând (1.3.25) şi (1.3.26) obţinem trecând la limită după $k \to \infty$ în (1.3.10) că

$$\int_O |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla\theta(x)\, dx = \int_O a(x)f(u(x))\theta(x)\, dx.$$

Cum $\mathbb{R}^N := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ concludem că, pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ cu $\varphi \geq 0$ în $\mathbb{R}^N$ şi suport compact $\subseteq O$, funcţia $u(x) := \lim_{k\to\infty} u^k(x)$, satisface (1.1.2) şi deci (1.1.1) în sens de distribuţii.

Pentru a stabili (1.3.6), din demonstraţia de mai sus avem

$$w(r) = \frac{1}{C} \int_0^{v(r)} t^{p-1}/\overline{\overline{f}}(t)\, dt \geq \frac{1}{C} \int_{v(r)/2}^{v(r)} t^{p-1}/\overline{\overline{f}}(t)\, dt := \frac{1}{C} \int_{v(r)/2}^{v(r)} h_1(t)\, dt,$$

unde

$$h_1(t) := \frac{t^{p-1}}{\overline{\overline{f}}(t)}, \quad t > 0.$$

Folosind (F1'), (F2') şi definiţia lui $\overline{\overline{f}}(t)$ găsim că

$$\begin{aligned} w(r) &\geq \frac{1}{C}h_1(v(r)/2)(v(r)/2) \\ &\geq \frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{p/(p-1)}\left(\frac{v(r)}{2}\right)^p \frac{1}{[f(v(r)/4)(1+1/f(v(r)/2))]^{1/(p-1)}}. \end{aligned}$$

Dar uzând de condiţia (F1) obţinem

$$w(r) \geq \frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}\right)^{p/(p-1)}\left(\frac{v(r)}{4}\right)^p \frac{2^{p+1}}{[f(v(r)/4)2^{p-1}+1]^{1/(p-1)}}. \tag{1.3.27}$$

Din (1.3.27), (F1) şi faptul că $u \leq v$ găsim

$$\frac{u(r)^p}{[f(u(r)/4)2^{p-1}+1]^{1/(p-1)}} \leq C \cdot 2^{[(p-1)^2+p]/(p-1)}w(r). \tag{1.3.28}$$

Pe de altă parte, folosind argumentele (1.3.15) observăm că

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty}\frac{w(r)}{r^{(p-\mu)/(p-1)}} &= \frac{p-1}{p-\mu}\lim_{r\to\infty}\frac{w'(r)}{r^{(1-\mu)/(p-1)}} \\ &= \frac{p-1}{\mu-p}\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^r \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma/r^{N-\mu}\right]^{1/(p-1)} \\ &= \frac{p-1}{\mu-p}\lim_{r\to\infty}\left[|x|^\mu\,\varphi(|x|)\right]^{1/(p-1)} < \infty. \end{aligned}$$

Rezultatul atrage

$$w(|x|) = O(|x|^{(p-\mu)/(p-1)}) \quad \textit{când} \quad |x| \to \infty.$$

Deci, (1.3.6) rezultă din argumentele de mai sus şi (1.3.28). ■

Remarca 1.3.1 *Teoremele enunţate se aplică clasei de funcţii $u^{-\gamma}+u^{\lambda}$ respectiv $u^{-\gamma}$ unde $\gamma > 0$, $0 < \lambda < p-1$ considerate în [84, 88, 95, 127, 135].*

Remarca 1.3.2 *Tehnica demonstraţiei se poate aplica problemei mai generale*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)f_1(u) + b(x)f_2(u) & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{în } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \to 0 & \text{când } |x| \to \infty \end{cases}$$

unde f_1+f_2 şi $a+b$ satisfac condiţiile Teoremei 1.3.2. Alegând

$$\Phi(r) = \max_{|x|=r} a(x) + \max_{|x|=r} b(x)$$

în A3), relaţia (1.3.6) devine

$$u(x)^p[f_1(u(x)/4)2^{p-1} + f_2(u(x)/4)2^{p-1}+1]^{-1/(p-1)} = O(|x|^{\frac{p-\mu}{p-1}}) \ \textit{când} \ |x| \to \infty.$$

Remarca 1.3.3 *Dacă* $f(u) = u^{-\gamma}, \gamma > 0$, *atunci este suficient să alegem* $\overline{\overline{f}}(y) = \left(\overline{f}(y)\right)^{1/(p-1)}$ *în locul lui (1.3.16) şi să efectuăm aceleaşi calcule pentru a obţine o super-soluţie a problemei (1.1.1) de forma*

$$v(r) := \left[C(\gamma+p)^{1/(p-1)}(p^2-p+\gamma)(p-1)^{-1}w(r)\right]^{(p-1)/(p^2-p+\gamma)}$$

unde $C := \left[(\gamma+p)^{1/(p-1)}(p^2-p+\gamma)(p-1)^{-1}K\right]^{(p-1)^2/(p-1+\gamma)}$.

1.4 Comentarii

În acest capitol am demonstrat existenţa a cel puţin o soluţie pentru problema cvasiliniară (1.1.1). Mai mult am stabilit comportamentul asimptotic al soluţiei lui (1.1.1) sub anumite restricţii. Când $p \neq 2$, problema apare în teoria fluidelor ne-Newtoniene, deci există un interes crescut în studierea existenţei soluţiilor lui (1.1.1).

Menţionăm că după ce rezultatele prezentului capitol au fost publicate, autorii Xiao-juan Chai, Weisheng Niu şi Peihao Zhao [22] respectiv Jose Valdo Goncalves şi Fernando Kennedy da Silva [69] au îmbunătăţit rezultatele de existenţă a soluţiilor obţinute de noi în cazul problemei (1.1.1), dar uzând şi de argumente introduse în acest capitol. Vom obţine şi noi în Capitolele 4 şi 5, pentru probleme mai generale, dar când în discuţie este luat operatorul laplacian clasic, că ipoteza (F2) nu este neapărat necesară ci doar suficientă.

O întrebare care ne-o punem este dacă condiţiile (A3) sunt neapărat necesare pentru studiul soluţiilor fără simetrie radială. Un răspuns în această direcţie a fost dat de Siegfried Carl şi Kanishka Perera în lucrarea [15] unde problemă similară lui (1.1.1) este considerată fără condiţii la limită. În privinţa soluţiilor cu simetrie radială va fi dat un răspuns în *Capitolul 2*.

În abordarea problemei (1.1.1) am acordat multă atenţie şi referinţelor [10, 79].

Capitolul 2

Rezultate de ne-existenţă a soluţiilor pentru o problemă cvasiliniară de tip Lane, Emden şi Fowler cu neliniaritatea depinzând de termenul gradient

2.1 Introducere

Fie $p \in (1, \infty)$ şi $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie de clasă C^1 îndeplinind

$$(F1) \quad \lim_{u \searrow 0} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty \text{ şi } (F2) \quad \lim_{u \nearrow \infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0,$$

iar $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ o funcţie local Hölder continuă de exponent $\alpha \in (0, 1)$ cu proprietăţile

$$(G1) \quad \lim_{u \searrow 0} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = +\infty \text{ şi } (G2) \quad \lim_{u \nearrow \infty} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = 0.$$

În acest capitol vom studia ne-existenţa soluţiilor cu simetrie radială pentru problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u\,(r) = a(r)[f(u(r)) + g(u(r)) + |\nabla u(r)|^q] & x \in \mathbb{R}^N,\ r := |x|\,, \\ u(r) > 0 & \textit{în } \mathbb{R}^N, \\ u(r) \to 0 & \textit{când } r \to \infty, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

unde $q \in \mathbb{R}_+$, $N > 2$, $1 < p < N$ iar $a : \mathbb{R}^N \to (0, \infty)$ este o funcţie continuă şi cu simetrie radială îndeplinind

$$\int_0^\infty r^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(r) dr = \infty \quad \textit{pentru } p \in [2, N) \tag{2.1.2}$$

$$\int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(r) dr = \infty \quad \textit{pentru } p \in (1, 2]\,. \tag{2.1.3}$$

Aşa cum am văzut în *Capitolul 1* autorii Cîrstea şi Rădulescu [18] respectiv Lair şi Shaker [88] au studiat ne-existenţa soluţiei în cazul problemei (1.1.1). Observăm uşor că rezultatele lor se pot extinde în aceeaşi manieră la problema (2.1.1). Rămâne astfel întrebarea dacă rezultatul din [18], [88] poate fi obţinut şi în cazul unei clase de funcţii mai generale. Vom demonstra că nu mai este necesară condiţia de monotonie asupra lui f sau $s \mapsto f(s)/s$ impusă în [18], [88] pentru stabilirea ne-existenţei soluţiilor.

Considerată în absenţa termenului gradient, în cazul $1 < p < N$ şi pentru condiţii mai restrictive ca în acest capitol, am văzut tot în *Capitolul 1* că Goncalves şi Santos [66] au obţinut pentru problema (2.1.1) rezultate de existenţă a soluţiilor cu simetrie radială.

În acest capitol vom stabili condiţii suficiente pentru ne-existenţa soluţiilor cu simetrie radială a problemei (2.1.1) în cazul când $f \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ este o funcţie singulară în 0. Cazul când f nu este singulară în zero este tratat de Goncalves şi Silva [70].

2.2 Rezultate preliminare

În următoarea lemă stabilim condiţii echivalente lui (F1)-(F2) în situaţia în care f este singulară în 0.

Lema 2.2.1 *Dacă $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ este o funcţie continuă atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{s\searrow 0} f(s) = \infty$ *şi* $\lim\limits_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$;

ii) *există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\lim\limits_{s\searrow 0} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = \infty$ *şi* $\lim\limits_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = 0$.

Demonstraţie: i)$\Longrightarrow$ii) Observăm că

$$\lim_{s\searrow 0} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = +\infty \quad \textit{deoarece } \lim_{s\searrow 0} f(s) = +\infty$$

şi

$$\lim_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = \lim_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} \frac{s^{p-1}}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = 0.$$

ii)$\Longrightarrow$i) Vom proceda ca în prima implicaţie, adică

$$\lim_{s\searrow 0} f(s) = \lim_{s\searrow 0} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} (s+\varepsilon)^{p-1} = +\infty$$

şi

$$\lim_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = \lim_{s\nearrow\infty} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} \frac{(s+\varepsilon)^{p-1}}{s^{p-1}} = 0.$$

■

Următoarele leme sunt un instrument util atât în demonstrarea existenţei soluţiilor cât şi ne-existenţei soluţiilor problemei (2.1.1). Notăm că ele sunt într-o formă mai generală decât cele regăsite în referinţele lui Feng şi Liu [56] şi Zhang [140]. Vor fi utilizate aici în forma descoperită.

Primul rezultat, folositor în *Capitolul 3*, îl introducem aici datorită legăturii lui cu rezultatul ce-l precede.

Lema 2.2.2 *Fie $\varepsilon \geq 0$. Dacă $f \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ şi una dintre condiţiile i) sau ii) din Lema 2.2.1 este îndeplinită, atunci există funcţia $\overline{f}^{\varepsilon} \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ astfel încât*

(1) $\overline{f}^{\varepsilon}$ *este descrescătoare pe $(0,\infty)$ şi $\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} \leq \overline{f}^{\varepsilon}(s)$, $\forall s > 0$;*

(2) $\lim_{s\to\infty} \overline{f}^{\varepsilon}(s) = 0$ *şi* $\lim_{s\to+0} \overline{f}^{\varepsilon}(s) = \infty$.

Demonstraţie: Datorită *Lemei 2.2.1* putem defini

$$\overline{f}^{\varepsilon}(s) = \sup_{t\geq s>0} \frac{f(t)}{(t+\varepsilon)^{p-1}}.$$

Observăm că

$$\overline{f}^{\varepsilon}(s) \geq \frac{f(t)}{(t+\varepsilon)^{p-1}} \ \forall s > 0 \text{ şi } t \geq s, \tag{2.2.1}$$

şi că $\overline{f}^{\varepsilon}(s)$ sunt funcţii descrescătoare pe $(0,\infty)$.

Folosind relaţia (2.2.1) şi faptul că

$$\lim_{s\searrow 0} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}} = \infty$$

obţinem $\lim\limits_{s\searrow 0} \overline{f}^{\varepsilon}(s) = \infty$.

Pe de altă parte folosind faptul că $\overline{f}^{\varepsilon}(s)$ sunt funcţii descrescătoare în $(0,\infty)$ obţinem pentru

$$0 < s_1 \leq s_2 < \infty$$

că $\overline{f}^{\varepsilon}(s_1) \geq \overline{f}^{\varepsilon}(s_2)$. Vom arăta că $\overline{f}^{\varepsilon}(s) \overset{s\to\infty}{\to} 0$. Într-adevăr, considerăm un şir $s_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ şi notăm că

$$\overline{f}^{\varepsilon}(s_n) = \sup_{t\geq s_n} \frac{f(t)}{(t+\varepsilon)^{p-1}}.$$

Acum, pentru orice $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ există $t_n \geq s_n$ astfel încât

$$\overline{f}^{\varepsilon}(s_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{f(t_n)}{(t_n+\varepsilon)^{p-1}} \leq \overline{f}^{\varepsilon}(s_n).$$

Deoarece $\overline{f}^{\varepsilon}(s_n)$ este descrescătoare şi mărginită avem

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}^{\varepsilon}(s_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n)}{(t_n+\varepsilon)^{p-1}} \leq \lim_{n\to\infty} \overline{f}^{\varepsilon}(s_n).$$

Dar

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}}=0$$

şi deci $\lim_{s\to\infty}\overline{f}^{\varepsilon}(s)=0$.

Un rezumat al celor de mai sus stabileşte

$$\lim_{s\to\infty}\overline{f}^{\varepsilon}(s)=0 \quad \text{ş}i \quad \lim_{s\to+0}\overline{f}^{\varepsilon}(s)=\infty.$$

Mai mult, putem presupune că $\overline{f}^{\varepsilon}\in C^1\left((0,\infty),(0,\infty)\right)$. În contrar, putem înlocui aceste funcţii prin

$$\overline{\overline{f}}^{\varepsilon}(s)=\frac{2}{s}\int_{s/2}^{s}\overline{f}^{\varepsilon}(t)dt, s>0.$$

Desigur $\overline{f}^{\varepsilon}(s)\le\overline{\overline{f}}^{\varepsilon}(s)\le\overline{f}^{\varepsilon}(s/2)$ pentru orice $s>0$ şi

$$\begin{aligned}[\overline{\overline{f}}^{\varepsilon}(s)]' &= \frac{2}{s}\left(\overline{f}^{\varepsilon}(s)-\frac{1}{2}\overline{f}^{\varepsilon}(s/2)\right)-\frac{2}{s^2}\int_{s/2}^{s}\overline{f}^{\varepsilon}(t)dt\\ &\le \frac{2}{s}\left(\overline{f}^{\varepsilon}(s)-\frac{1}{2}\overline{f}^{\varepsilon}(s/2)\right)-\frac{2}{s^2}\frac{s}{2}\overline{f}^{\varepsilon}(s)\\ &= \frac{1}{s}\left[\overline{f}^{\varepsilon}(s)-\overline{f}^{\varepsilon}(s/2)\right]\le 0,\end{aligned}$$

respectiv

$$\overline{\overline{f}}^{\varepsilon}(s)\in C^1((0,\infty),(0,\infty)),\ \varepsilon\ge 0$$

sunt funcţii descrescătoare. ■

Lema 2.2.3 *Fie $\varepsilon\ge 0$. Dacă $f\in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ şi una dintre condiţiile i) sau ii) din Lema 2.2.1 este îndeplinită, atunci există funcţia $\underline{f}_{\varepsilon}\in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ astfel încât*

(1) *$\underline{f}_{\varepsilon}$ este descrescătoare în $(0,\infty)$ şi $\underline{f}_{\varepsilon}(s)\le\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}}$, $\forall s>0$;*

(2) *$\lim_{s\to\infty}\underline{f}_{\varepsilon}(s)=0$ şi $\lim_{s\to+0}\underline{f}_{\varepsilon}(s)=\infty$.*

Demonstraţie: Datorită *Lemei* 2.2.1 putem defini

$$\underline{f}_{\varepsilon}(s)=\inf_{s\ge t>0}\frac{f(t)}{(t+\varepsilon)^{p-1}}.$$

Observăm că

$$0<\underline{f}_{\varepsilon}(s)\le\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{p-1}}, \forall s>0,\ s\ge t,$$

şi că $\underline{f}_{\varepsilon}(s)$ este o funcţie descrescătoare în $(0,\infty)$. Urmând acelaşi raţionament ca în *Lema* 2.2.2 avem

$$\lim_{s\to\infty}\underline{f}_{\varepsilon}(s)=0 \text{ ş}i \lim_{s\to+0}\underline{f}_{\varepsilon}(s)=\infty.$$

Mai mult, putem presupune că $\underline{f}_\varepsilon \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$. În caz contrar, putem să înlocuim această funcţie prin

$$\underline{f}_\varepsilon^1(s) = \int\limits_s^{s+1} \underline{f}_\varepsilon(t)dt, s > 0.$$

Evident,

$$\underline{f}_\varepsilon(s+1) \le \underline{f}_\varepsilon^1(s) \le \underline{f}_\varepsilon(s)$$

şi

$$[\underline{f}_\varepsilon^1(s)]' = \underline{f}_\varepsilon(s+1) - \underline{f}_\varepsilon(s) \le 0, \forall s > 0$$

respectiv

$$\underline{f}_\varepsilon^1(s) \in C^1((0,\infty),(0,\infty)),\ \varepsilon \ge 0,$$

sunt funcţii descrescătoare. ■

Următorul rezultat este cunoscut. El poate fi consultat în lucrările lui Hardy [72] sau Borsuk [13].

Lema 2.2.4 *Dacă $p > 1$ şi $j(x) \ge 0$ atunci*

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t j(x)dx \right)^p dt \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_0^\infty [j(t)]^p dt.$$

Folosind inegalitatea lui Jensen şi faptul că $h(x) = x^i$ este o funcţie concavă pentru $0 < i \le 1$ şi convexă pentru $1 \le i < +\infty$, obţinem:

Lema 2.2.5 *Dacă $j : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie local integrabilă pozitivă, atunci*

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^t j(x)dx \right)^h \le (resp. \ge) \frac{1}{t} \int_0^t j^h(x)dx$$

pentru orice $t \in I$, $0 < t$ şi $1 \le h < +\infty$ (respectiv $0 < h \le 1$).

În demonstrarea rezultatelor principale vom mai utiliza următoarea:

Lema 2.2.6 *Dacă $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ este o funcţie continuă şi cu simetrie radială ce satisface*

$$\int_0^\infty r^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(r)dr < \infty \quad pentru\ p \in (1,2], \tag{2.2.2}$$

$$\int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(r)dr < \infty \quad pentru\ p \in [2,N), \tag{2.2.3}$$

atunci

$$K := \int_0^{+\infty} \left(\xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma)d\sigma \right)^{1/(p-1)} d\xi < \infty.$$

Demonstraţie: *Cazul 1.* $1 < p \leq 2$.

Deoarece în acest caz avem

$$1 \leq \frac{1}{p-1} < \infty,$$

putem aplica inegalitatea lui Hardy, *Lema 2.2.4*, (sau *Lema* 2.2.5 pentru a găsi o altă estimare) şi obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \left(\xi^{1-N} \int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi = \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{N-1}{p-1}} \left(\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \\
\leq\ & \left[\frac{1}{p-1} \cdot \left(\frac{N-1}{p-1} - 1\right)^{-1}\right]^{1/(p-1)} \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{N-1}{p-1}} \left(\xi \xi^{N-1} a(\xi)\right)^{1/(p-1)} d\xi \\
=\ & \left(\frac{1}{N-p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^{+\infty} \xi^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(\xi) d\xi < \infty. \qquad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Cazul 2. $2 \leq p < N$.

Cum $1 \leq p-1$, obţinem că

$$1 \geq \frac{1}{p-1} > 0.$$

Distingem două cazuri

$$\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma < 1 \quad \textit{pentru orice } \xi > 0,$$

sau

$$\textit{există } \xi_0 > 0 \textit{ astfel încât} \int_0^{\xi_0} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma = 1.$$

În primul caz

$$\left(\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} < 1,$$

deci

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \leq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} d\xi,$$

este finit când $r \to \infty$ *şi* $N > p$. În cel de-al doilea caz,

$$\left(\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} \leq \int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma, \qquad (2.2.5)$$

pentru $\xi \geq \xi_0$. Integrând relaţia (2.2.5) de la 0 la r găsim

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \leq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0^{\xi} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma d\xi\,. \qquad (2.2.6)$$

Folosind teorema de integrare prin părţi în (2.2.6) avem

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= -\frac{p-1}{N-p} \int_0^r \frac{d}{d\xi} \xi^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= \frac{p-1}{N-p} \left(-r^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^r \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma + \int_0^r \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

Utilizând regula lui L' Hôpital în (2.2.7), concludem

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \left(-r^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^r \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma + \int_0^r \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi \right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{-\int_0^r \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma + r^{\frac{N-p}{p-1}} \int_0^r \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi}{r^{\frac{N-p}{p-1}}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi = \int_0^\infty \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi < \infty.
\end{aligned}
$$

fapt ce încheie demonstraţia lemei. ■

Rezultatele principale ale acestui capitol sunt publicate în referinţele [26], [30] şi sunt:

2.3 Rezultate principale

Teorema 2.3.1 *Presupunem că $f \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ este o funcţie singulară în 0 îndeplinind (F1)-(F2) iar $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie local Hölder continuă de exponent $\alpha \in (0,1)$ satisfăcând (G1)-(G2). Dacă în plus $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ este o funcţie continuă, cu simetrie radială şi cu proprietatea (2.1.2) atunci problema (2.1.1) nu are soluţii cu simetrie radială.*

Demonstraţie: Presupunem că (2.1.1) are o astfel de soluţie $u(r)$. Atunci ea verifică

$$
(r^{N-1} |u'|^{p-2} u'(r))' = -r^{N-1} a(r)[f(u(r)) + g(u(r)) + |\nabla u(r)|^q],
$$

sau, echivalent

$$
(r^{N-1} |u'|^{p-2} u'(r))' \le -r^{N-1} a(r)[f(u(r)) + g(u(r))].
$$

Integrând această expresie de la 0 la r, avem

$$
|u'|^{p-2} u' \le -r^{1-N} \int_0^r \sigma^{N-1} [f(u(\sigma)) + g(u(\sigma))] a(\sigma) d\sigma,
$$

fapt din care rezultă că $u'(r) < 0$ oricare ar fi $r > 0$.

Introducem funcţia auxiliară $\ln(u(r)+1) := \overline{u}(r) > 0$ pentru orice $r > 0$ şi observăm că

$$\Delta_p \overline{u}(r) = \frac{\Delta_p u(r)}{(u(r)+1)^{p-1}} - (p-1)\frac{|\nabla u(r)|^p}{(u(r)+1)^p},$$

relaţie din care se obţine că $\overline{u}(r)$ satisface

$$\begin{aligned} & -\frac{[f(u(r))+g(u(r))]a(r)}{(u(r)+1)^{p-1}} \\ \geq\ & \frac{1}{r^{N-1}}\left[r^{N-1}(-\overline{u}'(r))^{p-2}\overline{u}'(r)\right]' + (p-1)\frac{|\nabla u(r)|^p}{(u(r)+1)^p}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Multiplicând relaţia (2.3.1) prin r^{N-1} şi integrând în $(0,\xi)$ obţinem

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi \left[(-\overline{u}'(\sigma))^{p-1}\sigma^{N-1}\right]' d\sigma - (p-1)\int_0^\xi \frac{\sigma^{N-1}|\nabla u(\sigma)|^p}{(u(\sigma)+1)^p} d\sigma \\ \geq\ & \int_0^\xi \frac{[f(u(\sigma))+g(u(\sigma))]a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma, \end{aligned}$$

sau echivalent cu

$$\begin{aligned} & (-\overline{u}'(\xi))^{p-1}\xi^{N-1} - \int_0^\xi (p-1)\frac{\sigma^{N-1}|\nabla u(\sigma)|^p}{(u(\sigma)+1)^p} d\sigma \\ \geq\ & \int_0^\xi \frac{[f(u(\sigma))+g(u(\sigma))]a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\,. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Multiplicând ecuaţia (2.3.2) prin ξ^{1-N}, deducem că

$$\begin{aligned} & (-\overline{u}'(\xi))^{p-1} - \xi^{1-N}(p-1)\int_0^\xi \frac{\sigma^{N-1}|\nabla u(\sigma)|^p}{(u(\sigma)+1)^p} d\sigma \\ \geq\ & \xi^{1-N}\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma))+g(u(\sigma)))\,a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Din (2.3.3), avem

$$(-\overline{u}'(\xi))^{p-1} \geq \xi^{1-N}\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma))+g(u(\sigma)))\,a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma,$$

relaţie echivalentă cu

$$-\overline{u}'(\xi) \geq \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left[\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma))+g(u(\sigma)))\,a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\right]^{1/(p-1)}. \tag{2.3.4}$$

Integrând (2.3.4) în $(0,r)$, avem

$$\overline{u}(0) - \overline{u}(r) \geq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left[\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma))+g(u(\sigma)))\,a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi.$$

Observăm că $\overline{u}(r) < \overline{u}(0)$ pentru orice $r > 0$ dacă şi numai dacă $u(r) < u(0)$ pentru orice $r > 0$. Pe de altă parte

$$\frac{f(u(\sigma))+g(u(\sigma))}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} > \underline{f}_1(u(\sigma)), \tag{2.3.5}$$

unde $\underline{f}_1$ este funcţia corespunzătoare lui $\varepsilon = 1$ din *Lema 2.2.3*.

Deoarece $\overline{u}$ este pozitivă, obţinem

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma)) + g(u(\sigma)))\, a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi \le \overline{u}(0), \quad \forall r > 0. \tag{2.3.6}$$

Substituind (2.3.5) în expresia (2.3.6), obţinem

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^\xi a(\sigma)\sigma^{N-1} d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \le \frac{1}{\underline{f}_1(u(0))^{\frac{1}{p-1}}}\overline{u}(0) < \infty.$$

Acum, deoarece $2 \le p < N$, sau echivalent scris

$$1 \ge \frac{1}{p-1} > 0,$$

deducem că

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\frac{\xi}{\xi}\int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \\
&= \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \xi^{1/(p-1)} \left(\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \\
&\ge \int_0^r \xi^{\frac{2-N}{p-1}} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}} a^{1/(p-1)}(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= \int_0^r \xi^{\frac{2-N}{p-1}-1} \int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}} a^{1/(p-1)}(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= -\frac{p-1}{N-2}\int_0^r \frac{d}{d\xi}\xi^{\frac{2-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}} a^{1/(p-1)}(\sigma) d\sigma d\xi \qquad (2.3.7)\\
&= \frac{p-1}{N-2}\left(-r^{\frac{2-N}{p-1}} \int_0^r \sigma^{\frac{N-1}{p-1}} a^{1/(p-1)}(\sigma) d\sigma + \int_0^r \xi^{1/(p-1)} a(\xi)^{1/(p-1)} d\xi\right) \\
&\ge \frac{p-1}{N-2}\frac{1}{r^{\frac{N-2}{p-1}}} \int_0^r \left[r^{\frac{N-2}{p-1}} - (t)^{\frac{N-2}{p-1}}\right] t^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(t) dt \\
&\ge \frac{p-1}{N-2}\frac{1}{r^{\frac{N-2}{p-1}}} \left[r^{\frac{N-2}{p-1}} - \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{N-2}{p-1}}\right] \int_0^{r/2} t^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(t) dt \\
&= \frac{p-1}{N-2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-2}{p-1}}\right) \int_0^{r/2} t^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(t) dt \to \infty \quad \textit{când } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Deci

$$\infty > \frac{1}{\underline{f}_1(u(0))^{1/(p-1)}}\overline{u}(0) \ge \infty.$$

Am obţinut o contradicţie. ■

Teorema 2.3.2 *Fie $f \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ o funcţie singulară în 0 satisfăcând (F1), (F2) iar $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie local Hölder continuă de exponent $\alpha \in (0,1)$ ce verifică (G1), (G2). În ipoteza suplimentară $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ este o funcţie continuă şi cu simetrie radială iar $p \ge N$ problema (2.1.1) nu are soluţii cu simetrie radială.*

Demonstraţie: Presupunem că *(2.1.1)* are o astfel de soluţie pe care o notăm prin $u(r)$. Atunci ea verifică

$$-(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{N-1}a(r)[f(u(r)) + g(u(r)) + |\nabla u(r)|^q].$$

Deoarece membrul drept al acestei egalităţi este pozitiv pentru $r > 0$, rezultă că

$$(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' < 0 \quad \textit{pentru } r > 0,$$

şi în consecinţă $r \longmapsto r^{N-1}|u'|^{p-2}u'(r)$ este funcţie descrescătoare.

Întrucât această funcţie este descrescătoare şi $u'(r) < 0$, avem

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \le R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R) \le -C \quad \textit{pentru } r \ge R, \tag{2.3.8}$$

unde $C := -R^{N-1}|u'(R)|^{p-2}u'(R)$ este o constantă strict pozitivă.

Mai mult, relaţia (2.3.8) poate fi rescrisă astfel

$$-u'(r) \ge C_1 r^{\frac{1-N}{p-1}}, \tag{2.3.9}$$

cu

$$C_1 := C^{\frac{1}{p-1}} > 0.$$

Integrând inegalitatea (2.3.9) de la R la r avem

$$u(R) - u(r) \ge C_1 \int_R^r r^{\frac{1-N}{p-1}} dr \quad \textit{pentru } r \ge R.$$

Făcând $r \to \infty$, obţinem o contradicţie. ■

Teorema 2.3.3 *Dacă $f \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ este o funcţie singulară în 0 ce satisface (F1)-(F2), $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie local Hölder continuă de exponent $\alpha \in (0,1)$ ce verifică (G1)-(G2) iar $a : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ este o funcţie continuă, cu simetrie radială şi cu proprietatea (2.1.3) atunci problema (2.1.1) nu are soluţii cu simetrie radială.*

Demonstraţie: Presupunem că problema (2.1.1) are o astfel de soluţie. Cu acelaşi raţionament ca în demonstraţia *Teoremei 2.3.1*, avem

$$\overline{u}(0) - \overline{u}(r) \ge \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^\xi \frac{[f(u(\sigma)) + g(u(\sigma))]a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi. \tag{2.3.10}$$

Observăm că $\overline{u}(r) < \overline{u}(0)$ pentru orice $r > 0$ implică $u(r) < u(0)$ pentru orice $r > 0$. Deoarece $\overline{u}$ este pozitivă, relaţia (2.3.10) conduce la

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left[\int_0^\xi \frac{(f(u(\sigma)) + g(u(\sigma)))\, a(\sigma)\sigma^{N-1}}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi \le \overline{u}(0) \quad \forall r > 0. \tag{2.3.11}$$

Pe de altă parte

$$\frac{f(u(\sigma))+g(u(\sigma))}{(u(\sigma)+1)^{p-1}} > \underline{f}_1(u(\sigma)), \tag{2.3.12}$$

unde $\underline{f}_1$ este funcţia corespunzătoare lui $\varepsilon = 1$ din *Lema 2.2.3*. Substituind (2.3.12) în expresia (2.3.11) obţinem

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^\xi a(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \leq \frac{1}{\underline{f}_1(u(0))^{1/(p-1)}}\overline{u}(0) < \infty.$$

Considerăm $1 < p < 2$, sau echivalent

$$1 < \frac{1}{p-1} < +\infty.$$

Observăm că nu putem avea

$$\int_0^\xi r^{N-1}a(r)dr < 1 \quad \textit{pentru } \xi > 0.$$

Într-adevăr, în acest caz am avea

$$\begin{aligned}\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} d\xi &> \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma d\xi \\ &\geq \frac{p-1}{N-p}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)\int_0^{r/2} t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}a(t)dt \to \infty \quad \textit{când } r\to\infty\end{aligned}$$

ceea ce ar reprezenta o contradicţie.

Rămâne doar cazul

$$\textit{există } \xi_0 > 0 \textit{ astfel încât } \int_0^{\xi_0} \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma = 1,$$

în care avem

$$\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} \geq \int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma \quad \textit{pentru } \xi \geq \xi_0$$

şi deci

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \geq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma d\xi\,. \tag{2.3.13}$$

Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= -\frac{p-1}{N-p} \int_0^r \frac{d}{d\xi} \xi^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma d\xi \\
&= \frac{p-1}{N-p} \left(-r^{\frac{p-N}{p-1}} \int_0^r \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma + \int_0^r \xi^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(\xi) d\xi \right) \\
&\geq \frac{p-1}{N-p} \frac{1}{r^{\frac{N-p}{p-1}}} \int_0^r \left[r^{\frac{N-p}{p-1}} - (t)^{\frac{N-p}{p-1}} \right] t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(t) dt \\
&\geq \frac{p-1}{N-p} \frac{1}{r^{\frac{N-p}{p-1}}} \left(r^{\frac{N-p}{p-1}} - (\frac{r}{2})^{\frac{N-p}{p-1}} \right) \int_0^{r/2} t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(t) dt \\
&= \frac{p-1}{N-p} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}} \right) \int_0^{r/2} t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(t) dt = \infty \quad \textit{când } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\infty > \frac{1}{\underline{f}_1 (u(0))^{1/(p-1)}} \overline{u}(0) \geq \infty,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. ■

Remarca 2.3.1 *În ipotezele Teoremei 2.3.1 avem că*

$$\int_0^\infty t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} a(t) dt = \infty.$$

Demonstraţie: Într-adevăr, în situaţia în care

$$\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma \right)^{1/(p-1)} < 1$$

vedem, folosind (2.3.7), că

$$\begin{aligned}
&\frac{p-1}{N-2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-2}{p-1}} \right) \int_0^{r/2} t^{1/(p-1)} a^{1/(p-1)}(t) dt \\
&\leq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} \left(\int_0^\xi \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma \right)^{1/(p-1)} d\xi < \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}} d\xi.
\end{aligned}$$

În concluzie, *când* $r \to \infty$, avem

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{p-1}} a^{1/(p-1)}(t) dt \neq \infty.$$

Pe de altă parte, dacă am avea

$$\textit{există } \xi_0 > 0 \textit{ astfel încât } \int_0^{\xi_0} \sigma^{N-1} a(\sigma) d\sigma = 1,$$

atunci relaţia (2.2.7) conduce la

$$\frac{p-1}{N-2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-2}{p-1}}\right)\int_0^{r/2} t^{1/(p-1)}a^{1/(p-1)}(t)dt$$
$$\leq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \leq \frac{p-1}{N-p}\int_0^{r/2} t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}a(t)dt \text{ pentru } \xi \geq \xi_0,$$

fapt ce încheie demonstraţia. ■

Remarca 2.3.2 *Dacă ipotezele Teoremei 2.3.3 sunt îndeplinite atunci*

$$\int_0^\infty t^{1/(p-1)}a^{1/(p-1)}(t)dt = \infty. \tag{2.3.14}$$

Demonstraţie: Din relaţia (2.2.4) observăm că

$$\int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi \leq \left(\frac{1}{N-p}\right)^{1/(p-1)}\int_0^\infty t^{1/(p-1)}a^{1/(p-1)}(t)dt. \tag{2.3.15}$$

Când

$$\text{există } \xi_0 > 0 \text{ astfel încât } \int_0^{\xi_0} \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma = 1,$$

avem

$$\frac{p-1}{N-p}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)\int_0^{r/2} t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}a(t)dt \leq \int_0^r \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} d\xi\,. \tag{2.3.16}$$

În această situaţie (2.3.14) rezultă din (2.3.15) şi (2.3.16). Pe de altă parte, dacă

$$\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}a(\sigma)d\sigma\right)^{1/(p-1)} < 1,$$

observăm că

$$\int_0^\infty t^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}a(t)dt \neq \infty.$$

■

2.4 Comentarii

Studiul prezentului capitol s-a datorat unei probleme enunţată de autorii Xue şi Zhang în [137] unde ei tratează existenţa soluţiilor problemei (2.1.1), pentru $p = 2$, sub ipoteza că $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface proprietăţile (LS1)-(LS3) din *Capitolul 1*, iar $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ este o funcţie de clasă C^1 ce îndeplineşte (F1)-(F2) pe când $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ este presupusă a fi o funcţie local Hölder continuă de exponent $\alpha \in (0,1)$ şi satisfăcând (G1)-(G2). Problema propusă de ei este dacă condiţia (LS3) este necesară în studiul existenţei soluţiilor problemei (2.1.1).

În acest capitol noi am arătat că dacă condiţia (LS3) nu este îndeplinită atunci problema (2.1.1) nu are soluţii cu simetrie radială. Aşa cum am menţionat, Goncalves şi Santos [66] au stabilit rezultate de existenţă a soluţiilor cu simetrie radială pentru problema (2.1.1) în absenţa termenului gradient sub condiţia (LS3). Pe de altă parte în lucrarea [103], autorul a construit un exemplu pentru problema dezbătută de Lair şi Shaker în [88] prin care a arătat că relaţia (LS3) nu este neapărat necesară ci doar suficientă pentru existenţa soluţiilor fără simetrie radială.

Drept urmare, putem concluziona că problema ridicată de autorii referinţei [137] este complet rezolvată cu informaţiile aduse în acest capitol.

Mai mult noi am tratat problema (2.1.1) în cazul general $1 < p < \infty$ şi în plus prin *Remarcile 2.3.1, 2.3.2* coroborate cu rezultatele din Capitolul *1* şi din *[66]* am arătat că ipotezele (2.2.3)-(2.2.2) sunt „aproape necesare” în studiul existenţei soluţiilor şi în cazul $p \neq 2$.

Îndreptăm pe cei interesaţi de studiul soluţiilor cu simetrie radială pentru probleme ca (2.1.1) spre a folosi argumente din cartea [125].

Capitolul 3

Rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru o problemă eliptică semiliniară de tip Bieberbach şi Rademacher

3.1 Introducere

Următoarea problemă va fi considerată în acest capitol: Fiind date $a, c : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} (AC1) & \textit{există } \alpha \in (0,1) \textit{ astfel încât } a, c \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \; ; \\ (AC2) & a(x) > 0, c(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N; \\ (A3) & \int_0^\infty r\varphi(r)dr < \infty \textit{ unde } \varphi(r) = \max_{|x|=r} a(x) \end{array}$$

să se demonstreze existenţa a cel puţin unei soluţii $u\left(x\right) \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ce verifică problema

$$-\Delta u + c(x)u^{-1}\left|\nabla u\right|^2 = a(x) \text{ în } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \, u > 0 \text{ în } \Omega \tag{3.1.1}$$

cu $u(x) \to 0$ *când* $|x| \to \infty$, $N > 2$ şi $\Omega = \mathbb{R}^N$. De asemenea, ce putem spune când $\Omega \subset \mathbb{R}^N$?

Probleme similare lui (3.1.1) au fost intensiv studiate în cazul în care Ω este un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$. Studiul nostru este motivat de lucrările recente ale autorilor Arcoya, Carmona, Leonori, Aparicio, Orsina şi Petitta [7], Arcoya, Barile şi Aparicio [8] şi Shu [130] unde este studiată existenţa, ne-existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru probleme ca (3.1.1).

În acest capitol vom prezenta un nou argument, care poate fi aplicat, în rezolvarea problemelor similare lui (3.1.1) diferit de cel introdus în referinţele [7], [8], [130].

Problema este considerată în cazul în care domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este mărginit şi cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$ cu $\alpha \in (0,1)$.

Ecuaţia (3.1.1) conţine funcţia singulară u^{-1} şi termenul gradient $|\nabla u|^2$, care combinate cu funcţia c fac abordarea lor mai dificilă.

Folosind metoda sub şi super-soluţiilor precum şi argumente ale principiului de maxim vom prezenta condiţii suficiente pentru existenţa a cel puţin unei soluţii pentru problema (3.1.1).

Vom avea nevoie de câteva rezultate ajutătoare:

3.2 Rezultate preliminare

În demonstrarea existenţei soluţiei pentru problema enunţată, avem nevoie de un rezultat de scufundare al spaţiilor Sobolev în spaţii Hőlder rezultat ce poate fi consultat în cartea autorilor Gilbarg şi Trudinger [64] sau Mihlin [108].

Pentru aceasta considerăm U, V spaţii Banach şi reamintim următoarele noţiuni:

Definiţia 3.2.1 *Spunem că U se scufundă continuu în V şi scriem $U \hookrightarrow V$, dacă $U \subset V$ şi există o constantă $C > 0$ astfel încât $\forall u \in U$ avem $\|u\|_V \leq C \|u\|_U$.*

Definiţia 3.2.2 *Vom spune că U se scufundă compact în V şi scriem $U \hookrightarrow\hookrightarrow V$, dacă $U \hookrightarrow V$ şi orice şir mărginit în U are un subşir care este convergent în V.*

Cu aceste definiţii, avem următorul rezultat de scufundare al spaţiilor Sobolev în spaţii Hőlder:

Lema 3.2.1 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera de clasă C^1, $m \in \mathbb{N}$ şi $1 \leq p < \infty$. În aceste ipoteze, pentru orice*

$$r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < \alpha < 1$$

cu

$$m - N/p \geq r + \alpha$$

are loc scufundarea continuă

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Mai precis, există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Pe de altă parte, pentru orice

$$r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

cu

$$m - N/p > r + \alpha$$

are loc scufundarea compactă

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

ceea ce înseamnă că

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$$

şi orice şir mărginit în $W^{m,p}(\Omega)$ are un subşir convergent în $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$. Remarcăm că pentru un domeniu mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acest rezultat are loc pentru $W_0^{m,p}(\Omega)$ substituit lui $W^{m,p}(\Omega)$.

Următoarele două rezultate de estimare în interior a soluţiei (spunem interior deoarece $\Omega' \subset\subset \Omega$) pot fi regăsite în [64].

Lema 3.2.2 *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^N$ şi $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, satisfăcând*

$$-\Delta u = h \quad \textit{în} \quad \Omega$$

unde $h \in C^{\alpha}(\Omega)$. În aceste ipoteze pentru orice submulţime $\Omega' \subset\subset \Omega$, are loc estimarea

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C(\sup_{\Omega} u + \|h\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}),$$

unde C este o constantă ce depinde de $\alpha \in (0,1)$, Ω, Ω', de dimensiunea N şi $dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Lema 3.2.3 *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{R}^N$ şi*

$$u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega), 1 < p < \infty,$$

satisfăcând

$$-\Delta u = h \quad \textit{în} \quad \Omega$$

unde $h \in L^p(\Omega)$. În aceste ipoteze pentru orice domeniu $\Omega' \subset\subset \Omega$, are loc estimarea

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}),$$

unde C depinde de N, p, Ω', Ω.

Avem nevoie de următoarea variantă a principiului de maxim datorată lui [74] (vezi [122, 123]):

Lema 3.2.4 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera de clasă C^2. Dacă $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel încât*

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{în } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

atunci $u \geq 0$ în Ω.

Observăm că *Lema 1.2.5, pentru $p = 2$,* este o variantă mai generală a principiului de maxim. În acest sens Lema lui Hopf exprimă că în situaţia (3.2.1), are loc: ori u este constantă în Ω ori u este pozitivă şi neconstantă în Ω şi în acest caz, dacă există puncte de pe frontieră cu proprietatea că $u = 0$ în acele puncte, atunci normala exterioară $\partial u/\partial n$ în aceste puncte este strict negativă. În particular, principiul tare de maxim al lui Hopf stabileşte că dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică (3.2.1) cu $u = 0$ pe $\partial\Omega$ atunci $u \equiv 0$ în Ω sau $u > 0$ în Ω şi $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ pe $\partial\Omega$ (presupunând că $\partial\Omega$ are proprietatea sferei interioare în orice punct $x_0 \in \partial\Omega$, în sensul că pentru fiecare x_0 există o bilă închisă $\overline{B}$ astfel încât $B \cap \partial\Omega = \{x_0\}$).

Deoarece vom aplica metoda sub şi super-soluţiilor în forma obţinută de Amann [3], este necesar să definim noţiunea de sub şi super-soluţie în sensul definit în [3].

Pentru $f_1(x, \eta, \xi) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, Amann introduce următoarele definiţii:

Definiţia 3.2.3 *O funcţie $\underline{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ se numeşte sub-soluţie a problemei*

$$-\Delta u = f_1(x, u, \nabla u) \text{ în } \Omega, \; u = g \text{ pe } \partial\Omega, \tag{3.2.2}$$

dacă

$$-\Delta \underline{u} \leq f_1(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \text{ în } \Omega, \; \underline{u} = g \text{ pe } \partial\Omega.$$

Definiţia 3.2.4 *O funcţie $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ se numeşte super-soluţie a problemei (3.2.2) dacă*

$$-\Delta \overline{u} \geq f_1(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \text{ în } \Omega, \; \overline{u} = g \text{ pe } \partial\Omega.$$

Rezultatul principal preluat din [3] este:

Lema 3.2.5 *Fie Ω un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$ $(\alpha \in (0, 1))$, $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ iar f_1 este o funcţie continuă cu proprietatea că $\partial f_1/\partial\eta$, $\partial f_1/\partial\xi^i$, $i = \overline{1, N}$ există, sunt continue pe $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{N+1}$ şi astfel încât:*

AM1) $f_1(\cdot,\eta,\xi) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, *uniform pentru* (η,ξ) *în mulţimi mărginite ale lui* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$*;*

AM2) *există o funcţie* $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$|f_1(x,\eta,\xi)| \le f_2(\rho)(1+|\xi|^2), \tag{3.2.3}$$

pentru orice $\rho \ge 0$ *şi orice* $(x,\eta,\xi) \in \overline{\Omega}\times[-\rho,\rho]\times\mathbb{R}^N$.

În aceste ipoteze, dacă problema (3.2.2) are o sub-soluţie $\underline{u}$ *şi o super-soluţie* $\overline{u}$ *astfel încât* $\underline{u}(x) \le \overline{u}(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ *atunci există cel puţin o funcţie* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *cu proprietatea* $\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x)$ *oricare ar fi* $x \in \overline{\Omega}$ *şi satisfăcând (3.2.2) punctual. Mai precis, există o soluţie minimală* $\widetilde{u} \in [\underline{u},\overline{u}]$ *şi o soluţie maximală* $\widetilde{\widetilde{u}} \in [\underline{u},\overline{u}]$*, în sensul că orice soluţie* $u \in [\underline{u},\overline{u}]$ *satisface* $\widetilde{u} \le u \le \widetilde{\widetilde{u}}$.

Suntem în măsură să demonstrăm:

3.3 Rezultate principale

În cele ce urmează vom utiliza argumente similare lui Crandall, Rabinowitz şi Tartar [36], Noussair [115] şi Cui [37].

Teorema 3.3.1 *Dacă* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *este un domeniu mărginit cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{2,\alpha}$ $(\alpha \in (0,1))$ *şi* a, $c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a(x) > 0$, $c(x) > 0$ *pentru orice* $x \in \overline{\Omega}$ *atunci problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u^{-1}\,|\nabla u|^2 = a(x) \quad \text{în} \quad \Omega,\ u > 0 \ \text{ în } \ \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

are cel puţin o soluţie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon \in (0,1)$. În stabilirea existenţei soluţiei lui (3.3.1) vom studia mai întâi problema aproximativă

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u^{-1}\,|\nabla u|^2 = a(x), & \text{în} \quad \Omega, \\ u > \varepsilon, & \text{în} \quad \Omega, \\ u = \varepsilon, & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Pentru aceasta considerăm $\varphi_1 > 0$ prima funcţie proprie corespunzătoare primei valori proprii λ_1 a problemei

$$-\Delta u = \lambda u \ \text{ în } \ \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = 0. \tag{3.3.3}$$

Se ştie din [64] că $\varphi_1 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Notăm $m_2 := \min_{x\in\overline{\Omega}} a(x)$ şi $M_1 := \max_{x\in\overline{\Omega}} c(x)$ şi demonstrăm că funcţia $\underline{u} = \sigma_1\varphi_1^2 + \varepsilon$, unde

$$0 < \sigma_1 \leq \min\left\{\frac{m_2}{2\lambda_1 \max_{x\in\overline{\Omega}} \varphi_1^2 + 4M_1 \max_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla\varphi_1|^2}, 1\right\} \tag{3.3.4}$$

este o sub-soluţie a problemei (3.3.2) în sensul *Lemei 3.2.5*. Într-adevăr, din (3.3.4) avem

$$\begin{aligned}
&-\Delta\underline{u} + c(x)\underline{u}^{-1}|\nabla\underline{u}|^2 - a(x) \leq -\Delta\underline{u} + M_1\underline{u}^{-1}|\nabla\underline{u}|^2 - m_2\\
&\leq -2\sigma_1\varphi_1\Delta\varphi_1 - 2\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 + 4M_1\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 - m_2\\
&= 2\sigma_1\lambda_1\varphi_1^2 - 2\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 + 4M_1\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 - m_2\\
&\leq 2\sigma_1\lambda_1\varphi_1^2 + 4M_1\sigma_1|\nabla\varphi_1|^2 - m_2 \leq 0.
\end{aligned}$$

În continuare vom proba existenţa unei super-soluţii a problemei (3.3.2). Pentru aceasta fie $v \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ unica soluţie a problemei

$$-\Delta y = a(x) \text{ } \mathit{în} \text{ } \Omega,\ y > 0 \text{ } \mathit{în} \text{ } \Omega,\ y(x) = 0 \text{ } \mathit{pentru} \text{ } x \in \partial\Omega, \tag{3.3.5}$$

şi observăm că, $\overline{u} = v + \varepsilon \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, satisface

$$-\Delta\overline{u} + c(x)\overline{u}^{-1}|\nabla\overline{u}|^2 = a(x) + c(x)\overline{u}^{-1}|\nabla\overline{u}|^2 \geq a(x).$$

Clar, $\overline{u}$ este o super-soluţie a lui (3.3.2). Acum, deoarece

$$\begin{cases} -\Delta(\overline{u} - \underline{u}) \geq a(x) + c(x)\underline{u}^{-1}|\nabla\underline{u}|^2 - a(x) \geq 0 \text{ } \mathit{în} \text{ } \Omega,\\ \overline{u}(x) - \underline{u}(x) = 0 \text{ } \mathit{pentru} \text{ } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3.6}$$

rezultă din principiul de maxim, *Lema 3.2.4*, că $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$.

Am obţinut o sub-soluţie $\underline{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ şi o super-soluţie $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pentru problema (3.3.2) astfel încât $\underline{u} \leq \overline{u}$ pe $\overline{\Omega}$ în ipotezele *Lemei 3.2.5*. Deci, există $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ cu proprietatea

$$\underline{u}(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq \overline{u}(x) \text{ } \mathit{pentru} \text{ } x \in \overline{\Omega}, \tag{3.3.7}$$

şi verificând problema (3.3.2) punctual.

Relaţia (3.3.7) arată că $u > 0$ în Ω. Remarcăm că şi $\underline{u} = \sigma_1 v^2 + \varepsilon$, unde σ_1 este o constantă pozitivă astfel încât

$$0 < \sigma_1 \leq \min\left\{\frac{m_2}{\max_{x\in\overline{\Omega}}[2v + 4M_1|\nabla v|^2]}, 1\right\}, \tag{3.3.8}$$

este o sub-soluţie a lui (3.3.2) cu aceleaşi proprietăţi din *Lema 3.2.5*.

Până în prezent am obţinut o funcţie $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ce verifică punctual problema echivalentă lui (3.3.2):

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)\,(u+\varepsilon)^{-1}\,|\nabla u|^2 = a(x) & \text{în} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad u > 0 \ \text{ în } \ \Omega, \quad u = 0, \ \textit{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Vom arăta că, pentru orice domeniu mărginit $\Omega' \subset\subset \Omega$ cu frontiera de clasă $C^{2,\alpha}$ există o constantă $C_4 > 0$ îndeplinind

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}')} \le C_4. \tag{3.3.9}$$

Într-adevăr, pentru $\Omega' \subset \subset \Omega$, alegem Ω_1, Ω_2 şi Ω_3 cu frontiera de clasă $C^{2,\alpha}$ $\alpha \in (0,1)$, astfel încât

$$\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega_3 \subset\subset \Omega.$$

Notăm că

$$u_\varepsilon(x) \ge \underline{u} > 0, \ \forall x \in \Omega_i, \ \ i = \overline{1,3}. \tag{3.3.10}$$

Fie

$$h_\varepsilon(x) = a(x) - c(x)\,(u_\varepsilon(x)+\varepsilon)^{-1}\,|\nabla u_\varepsilon(x)|^2 \ \ \textit{pentru } x \in \overline{\Omega_3}.$$

În cele ce urmează $C_{i=\overline{1,4}}$, desemnează constante pozitive independente de ε.

Deoarece $-\Delta u_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x)$, $x \in \overline{\Omega_3}$, din teorema de estimare în interior a gradientului datorată autorilor Ladyzenskaya şi Ural'treva [86] rezultă că există constanta pozitivă C_1 independentă de ε astfel încât

$$\max_{x\in\overline{\Omega}_2} \|\nabla u_\varepsilon(x)\| \le C_1 \max_{x\in\overline{\Omega}_3} u_\varepsilon(x)\,. \tag{3.3.11}$$

Folosind (3.3.7) şi (3.3.11) obţinem că $\|\nabla u_\varepsilon\|$ este uniform mărginit în $\overline{\Omega}_2$. Acest ultim rezultat, proprietăţile lui a şi c arată că $|h_\varepsilon|$ este uniform mărginită pe $\overline{\Omega}_2$ şi deci $h_\varepsilon \in L^p(\Omega_2)$ pentru orice $p > 1$.

Cum

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) \ \ \textit{pentru} \ \ x \in \Omega_2,$$

din *Lema 3.2.3* rezultă că există o constantă pozitivă C_2 independentă de ε astfel încât

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega_1)} \le C_2(\|h_\varepsilon(x)\|_{L^p(\Omega_2)} + \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_2)}),$$

fapt ce arată că $\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega_1)}$ este uniform mărginită.

Alegem p astfel încât $p > N$ şi $p > N\,(1-\alpha)^{-1}$ şi folosim teorema de scufundare a lui Sobolev's, *Lema 3.2.1*, pentru a rezulta că $\|u_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}$ este uniform mărginită de o constantă independentă de ε.

Mai mult, aceasta implică că $h_\varepsilon \in C^\alpha(\overline{\Omega}_1)$ şi $\|h_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}$ este uniform mărginită. Folosind teorema de estimare în interior a lui Schauder, *Lema 3.2.2,* pentru soluţiile ecuaţiilor eliptice (3.3.18) avem că există o constantă pozitivă C_3 independentă de ε cu proprietatea

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C_3 \left(\|h_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)} + \sup_{\overline{\Omega}_1} u_\varepsilon \right). \tag{3.3.12}$$

Deoarece $\|h_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)}$ este uniform mărginit, vom observa din (3.3.12) că

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C_4. \tag{3.3.13}$$

Astfel, (3.3.9) este demonstrat.

Punem $\varepsilon := 1/n$ şi $u_n := u_{1/n}$. Cum u_n este mărginit în $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}'\right)$ pentru orice domeniu mărginit $\Omega' \subset\subset \Omega$ cu frontiera de clasă $C^{2,\alpha}$, conform (3.3.13), putem folosi teorema lui Ascoli-Arzela şi procedeul de diagonalizare, pentru a obţine un subşir al lui u_n, notat tot prin u_n şi o funcţie $u \in C^2\left(\overline{\Omega}'\right)$ astfel încât

$$\|u_n - u\|_{C^2(\overline{\Omega}')} \to 0 \textit{ când } n \to \infty.$$

În particular Δu_n *şi* $a(x) - c(x)(u_n + 1/n)^{-1} |\nabla u_n|^2$ converg *când* $n \to \infty$ în $\overline{\Omega}'$ la Δu *şi* $a(x) - c(x)u^{-1} |\nabla u|^2$ respectiv.

Atunci u este o soluţie a problemei

$$-\Delta u = a(x) - c(x)u^{-1} |\nabla u|^2 \textit{ în } \overline{\Omega}', \tag{3.3.14}$$

de clasă $C^2(\overline{\Omega}')$ şi deci de clasă $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')$ din argumentele standard bazate pe estimarea Schauder.

Întrucât Ω' este arbitrară, rezultă că $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Am obţinut $u_n \to u$ (punctual) în $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Acum, trecând la limită în (3.3.7) pentru $n \to \infty$, rezultă

$$\sigma_1 \varphi_1^2(x) \leq u(x) \leq v(x) \textit{ pentru } x \in \overline{\Omega}. \tag{3.3.15}$$

Mai mult, din (3.3.14) şi (3.3.15), obţinem că

$$-\Delta u = a(x) - c(x)u^{-1} |\nabla u|^2 \quad \textit{în } \Omega, \; u > 0 \textit{ în } \Omega, \; u_{|\partial\Omega} = 0.$$

Atunci $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ este soluţie a problemei (3.3.1). ∎

În următorul rezultat stabilim condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor lui (3.1.1) pentru $\Omega = \mathbb{R}^N$. El reprezintă unul din rezultatele comunicate în [33].

Teorema 3.3.2 *În ipotezele (AC1), (AC2), (A3) problema (3.1.1) are cel puţin o soluţie $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Dacă, în plus, există $\mu \in (2, N)$ astfel încât*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\mu} \varphi(|x|) < \infty \tag{3.3.16}$$

atunci

$$u(x) = O(|x|^{2-\mu}) \text{ când } |x| \to \infty. \tag{3.3.17}$$

Demonstraţie: Pentru a demonstra existenţa soluţiei lui (3.1.1) vom considera următoarea problemă

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u^{-1}|\nabla u|^2 = a(x) \text{ în } B_k, & u > 0 \text{ în } B_k, \\ u = 0 & \text{pe } \partial B_k, \end{cases} \tag{3.3.18}$$

unde $B_k := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x| < k\}$ este o bilă de centru 0 şi rază $k = 1, 2, ...$ Punem $\Omega = B_k$ în *Teorema 3.3.1*. Atunci problema (3.3.18) are cel puţin o soluţie $u_k \in C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k)$, ce satisface

$$\underline{u} \le u_k \le \overline{u} \text{ în } B_k, \tag{3.3.19}$$

unde $\underline{u}$ (respectiv $\overline{u}$) sunt funcţiile corespunzătoare din *Teorema 3.3.1* pentru $\Omega = B_k$. În afara lui B_k vom pune $u_k = 0$. Funcţia rezultată este în $\mathbb{R}^N$. Acum observăm că

$$\begin{aligned} w(|x|) \;&:= K - \int_0^{|x|} \xi^{1-N} \int_0^{\xi} \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma d\xi, \\ K \;&:= \int_0^{\infty} \xi^{1-N} \int_0^{\xi} \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma d\xi, \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

este unica soluţie cu simetrie radială, strict pozitivă şi mărginită a problemei

$$\begin{cases} -\Delta w = \varphi(|\,x\,|) & \text{în } \mathbb{R}^N, \; w > 0 \text{ în } \mathbb{R}^N \\ w\,(x) \to 0 & \text{când } |x| \to \infty, \end{cases}$$

şi, în plus, satisface

$$-\Delta w\,(|x|) + c(x)w^{-1}\,(|x|)\,|\nabla w\,(|x|)|^2 \ge a(x) \;\; \text{pentru } x \in \mathbb{R}^N,$$

$0 < w < K$, $K := \frac{1}{N-2}\int_0^{\infty} r\varphi(r)dr$ $(r := |x|)$ şi $w(r) \to 0$ *când* $r \to \infty$.

Demonstrăm că

$$u_k\,(x) \le w(|x|), \;\; x \in \mathbb{R}^N, \; k = 1, 2, 3, ... \tag{3.3.21}$$

Deoarece $w > 0$ în $\mathbb{R}^N$ şi $u_k = 0$ în $\mathbb{R}^N \backslash B_k$ este suficient să arătăm că

$$u_k \le w \text{ în } \overline{B_k}, \;\; k = 1, 2, 3, ...$$

Pentru a arăta aceasta observăm că $w \in C^2\left(\overline{B}_k\right)$ şi

$$\begin{aligned} -\Delta\left(w-u_k\right) &\geq c(x)u_k^{-1}\left|\nabla u_k\right|^2 - a(x) + a(x) \geq 0 \ \text{ în } \ B_k, \\ w-u_k &> 0 \ \text{ pentru } \ |x| = k. \end{aligned}$$

Ca o consecinţă a principiului de maxim, *Lema 3.2.4*, avem că $u_k \leq w$ în B_k. Deci (3.3.21) are loc.

Folosind procedura standard de convergenţă (vezi *Capitolul 4* ori [115] şi [37]) vedem că din u_k putem extrage un subşir, notat tot prin u_k, astfel încât $u_k \to u$ (punctual) în $C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ şi că u este soluţie a problemei (3.3.1).

În ordine, pentru a arăta (3.3.17), din argumentele de mai sus avem

$$u\left(x\right) \leq w\left(|x|\right) \ \text{pentru} \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.3.22}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} \frac{w(x)}{|x|^{2-\mu}} &= \frac{1}{2-\mu} \lim_{|x|\to\infty} \frac{w'(x)}{|x|^{1-\mu}} \\ &= \frac{1}{\mu-2} \lim_{|x|\to\infty} \left[\int_0^{|x|} \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma / \left|x\right|^{N-\mu}\right] \\ &= \frac{1}{\mu-2} \lim_{|x|\to\infty} |x|^{\mu}\varphi(|x|) < \infty. \end{aligned}$$

Deci

$$w(x) = O(|x|^{2-\mu}) \ \text{când} \ |x| \to \infty, \tag{3.3.23}$$

şi (3.3.17) rezultă din (3.3.23) şi (3.3.22). Demonstraţia *Teoremei 3.3.2* este acum completă. ■

Importanţa rezultatului din *Teoremele* 3.3.1, *3.3.2* este redată considerând problema

$$\Delta u = a(x)h(u) \ \text{în} \ \Omega, \, u > 0 \ \text{în} \ \Omega, \quad u(x) \to \infty \ \text{când} \ x \to \partial\Omega \tag{3.3.24}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este o mulţime.

Vom deduce uşor următoarele 2 remarci:

Remarca 3.3.1 *Când $h(u) = e^u$, printr-o transformare de forma $w = e^{-u}$ problema (3.3.24) devine*

$$-\Delta w + \frac{|\nabla w|^2}{w} = a(x) \ \text{în} \ \Omega, \, w > 0 \ \text{în} \ \Omega, \, w \to 0 \ \text{când} \ x \to \partial\Omega, \tag{3.3.25}$$

dar aceasta este problema (3.1.1) pentru $c(x) = 1$.

Remarca 3.3.2 *Când* $h(u) = u^\delta$ $(\delta > 1)$ *pentru* $w = Cu^{-C^{-1}}, (C := 1/(\delta - 1))$ *în (3.3.24) avem*

$$-\Delta w + \delta C \frac{|\nabla w|^2}{w} = a(x) \text{ în } \Omega,\ w > 0 \text{ în } \Omega,\ w \to 0 \text{ când } x \to \partial\Omega, \tag{3.3.26}$$

dar aceasta este problema (3.1.1) când $c(x) = \delta C$*.*

În consecinţă, soluţia problemei (3.3.24) poate fi obţinută printr-o simplă transformare a soluţiei obţinută în *Teoremele* 3.3.1*, 3.3.2*. Problemele (3.3.25), (3.3.26) apar de exemplu în studiul geometriei Riemanniene (vezi Cheng şi Ni [25]), potenţialului electric în câteva corpuri (vezi Keller [80]) şi în studiul mişcării unui gaz într-un spaţiu închis (vezi Pohozaev [116]).

În continuare vom prezenta un rezultat de unicitate pentru problema (3.3.24):

Remarca 3.3.3 *Fie* Ω *un domeniu mărginit al lui* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ *ce satisface condiţia sferei uniform interioare şi exterioare în fiecare punct de pe frontiera* $\partial\Omega$*. Presupunem că funcţia* a *satisface (AC1)-(AC2) şi că* h *este o funcţie de clasă* C^1 *pozitivă şi definită pe* $[0, \infty)$ *astfel încât* h *este strict crescătoare în* $(0, \infty)$ *cu* $h(0) = 0$*. Dacă, în plus*

$$s \longmapsto h(s)/s \text{ este strict crescătoare,} \tag{3.3.27}$$

$$\int_t^\infty \left[\int_0^z h(x)dx\right]^{-1/2} dz < \infty \text{ pentru orice } t > 0$$

şi pentru orice $\beta \in (0, 1)$ *avem*

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\int_{\beta t}^\infty \left(\int_0^s h(y)\, dy\right)^{-1/2} ds \Big/ \int_t^\infty \left(\int_0^s h(y)\, dy\right) ds\right] > 1, \tag{3.3.28}$$

atunci există o unică soluţie a problemei (3.3.24).

Demonstraţie: Presupunem că u şi v sunt soluţii arbitrare ale problemei (3.3.24). Va fi arătat că $u \leq v$ pentru orice $x \in \Omega$. Notăm $\alpha(x) := u(x)/v(x) - 1$ şi presupunem prin absurd că $u > v$. Sub ipotezele asupra lui a, h şi lui Ω cunoaştem din literatura problemei (3.3.24) (vezi spre exemplu [9]) că sub ipotezele noastre

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0\in\partial\Omega}} \alpha(x) = 0, \tag{3.3.29}$$

fapt ce atrage $\max_{x\in\Omega} \alpha(x)$ există şi este pozitiv. În punctul x_0 unde maximumul este atins, avem $\nabla\alpha(x_0) = 0$ *şi* $\Delta\alpha(x_0) \leq 0$, fapt ce implică

$$\Big(-v\Delta u + u\Delta v\Big)(x_0) \geq 0. \tag{3.3.30}$$

Atunci (3.3.30) implică

$$\left(\frac{h(v)}{v} - \frac{h(u)}{u}\right)(x_0) \geq 0,$$

care intră în contradicţie cu $t \longmapsto h(t)/t$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Deci $u \leq v$ în $\overline{\Omega}$. Un argument simetric arată că $v(x) \leq u(x)$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi deci $u(x) = v(x)$ în $\overline{\Omega}$. ■

3.4 Comentarii

Când $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^2$, $a(x) = 1$ şi $h(u) = e^u$ problema (3.3.24) a fost pentru prima dată studiată de Bieberbach [12]. Rezultatele de existenţă stabilite de Bieberbach au fost extinse de Rademacher [124] la mulţimi mărginite din $\mathbb{R}^3$ suficient de netede.

Tot pentru multimi mărginite din $\mathbb{R}^N$, independent, Keller [81] şi Osserman [117] au găsit condiţii necesare şi suficiente asupra lui h privind existenţa soluţiilor problemei (3.3.24).

Keller în lucrarea sa foloseşte pentru obţinerea rezultatelor fundamentale următoarea convenţie:

Definiţia 3.4.1 *Spunem că funcţia continuă $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisface condiţia G dacă există o funcţie continuă, pozitivă $l(u)$ cu $h(u) \geq l(u)$ şi*

$$\int_0^\infty \left[\int_0^z l(x)dx\right]^{-1/2} dz < \infty.$$

În ipotezele că $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit a cărui frontieră este $\partial\Omega$, $l(u)$ satisface condiţia G şi u este o soluţie a problemei (3.3.24) Keller arată că există o funcţie descrescătoare g determinată de $l(u)$ astfel încât $u(P) \leq g[R(P)]$, unde P este un punct din Ω iar prin $R(P)$ notează distanţa de la P la $\partial\Omega$. De asemenea $g(R)$ are proprietăţile $\lim_{R\to 0} g(R) = \infty$ şi $\lim_{R\to\infty} g(R) = -\infty$.

Mai mult folosind aceste rezultate el arată că dacă $h(u)$ este crescătoare şi satisface condiţia G, atunci în orice domeniu mărginit Ω există cel puţin o soluţie a problemei (3.3.24).

Vom obţine şi noi în Capitolul 7 rezultate asemănătoare de existenţă a soluţiei pentru problema (3.3.24) studiată în prezenţa operatorului p-Laplacian. Tehnica demonstraţiei este similară celei acestui capitol însă nu avem o caracterizare a soluţiei precum cea obţinută aici.

Capitolul 4

Rezultate de existenţă a soluţiei pentru o problemă semiliniară de tip Klein şi Gordon

4.1 Introducere

În acest capitol vom studia existenţa soluţiilor pentru problema

$$-\Delta u + c(x)u = a(x)f(u), u > 0 \quad \hat{\imath}n\ \mathbb{R}^N,\ u(x) \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \tag{4.1.1}$$

unde $N > 2$.

În studiul problemei considerate vom presupune că funcţiile $a, c : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfac:

(AC1) $a, c \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pentru $\alpha \in (0, 1)$;

(AC2) $a(x) > 0, c(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(A3) pentru $\varphi(r) = \max_{|x|=r} a(x)$ avem

$$\int_0^\infty r\varphi(r)dr < \infty,$$

şi că funcţia neliniară $f \in C^1((0, \infty), (0, \infty))$ satisface următoarele proprietăţi:

(F1) $\lim\limits_{u\searrow 0} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ şi $\lim\limits_{u\nearrow\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$.

În acord cu rezultatele discutate de Aris în [6] şi introducerea articolului lui Xue şi Zhang [137] pentru $c(x) = 0$ astfel de probleme (4.1.1) apar în studiul proceselor de reacţie difuzie, în teoria controlului stochastic, în mecanica fluidelor, în mecanica relativistă, suprafeţe singulare minimale etc.

Datorită apariţiei în multe aplicaţii ale ştiinţei, foarte multe forme speciale ale problemei (4.1.1) au fost intens studiate. Primul exemplu de problemă similară lui (4.1.1) a fost introdusă în 1869 de Homer Lane [93], el fiind interesat de calculul masei şi densitatea de temperatură de pe suprafaţa Soarelui. Studiul respectiv a fost continuat de Robert Emden [50, 52] şi Ralph Howard Fowler [55, 56].

În fapt, problema de tip Lane-Emden-Fowler studiată în [50, 52, 55, 56, 93] este o ecuaţie diferenţială de forma

$$-(\xi^2 x'(\xi))' = \xi^2 x^p(\xi), \ p \in \mathbb{R}.$$

Pentru o discuţie mai detaliată în această direcţie facem trimitere la referinţele [23, 62]. Pentru interesul acordat problemelor de acest tip vezi lectura Nobel a autorului Subrahmanyan Chandrasekhar [24] unde este dezbătut un fenomen real prin ecuaţii similare lui (4.1.1).

După 1980 astfel de probleme au fost intensiv studiate în contextul ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Rezultate de existenţă a soluţiei în $\mathbb{R}^N$ pentru $c\,(x) = 0$ şi $f(u) = u^{-\gamma}$ cu $\gamma \in (0,1)$ au fost stabilite de către Kusano-Swanson [85] şi Edelson [50]. Aceste rezultate au fost generalizate pentru orice $\gamma > 0$ prin metoda sub şi super-soluţiilor de Shaker [127] şi folosind alte argumente de către Dalmasso [38]. Lair şi Shaker au continuat în [88] studiul pentru $c(x) = 0$ şi $f(u) = u^{-\gamma}$ cu $\gamma > 0$. Sub ipotezele enunţate mai sus autorii au demonstrat existenţa şi unicitatea unei soluţii $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. În plus, autorii au demonstrat că (A3) este necesară şi suficientă în studiul soluţiilor cu simetrie radială. Când $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit şi cu frontiera de clasă $C^{2,\alpha}$ unde $\alpha \in (0,1)$, Shi şi Yao au demonstrat în [128] că problema

$$\begin{cases} -\Delta y = a(x)[y^{-\gamma} + y^{\delta}] \ \textit{în} \ \Omega, \, y > 0 \ \textit{în} \ \Omega, \\ y = 0 \ \textit{pentru} \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.2}$$

unde $a \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ este o funcţie strict pozitivă, admite o unică soluţie pozitivă $y \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pentru orice $\gamma, \delta \in (0,1)$.

După aceste rezultate, autorii Sun Yijing şi Li Shujie [135] au extins aceste rezultate la cazul $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Pentru o prezentare detaliată a rezultatelor anterioare şi mai multe referinţe, menţionăm lucrările: Cârstea şi Rădulescu [18], Ghergu şi Rădulescu [63], Goncalves şi Santos [68, 67], Lair şi Shaker [88], Shi şi Yao [128], Yijing şi Shujie [135], Xue şi Zhang [137] şi Zhang [140].

Remarcăm că pentru funcţii neliniare f mai generale ca în [18, 88, 127, 128, 135] problema (4.1.2) a fost considerată de autorii Goncalves şi Santos [67]. În [29] autorul a extins rezultatele din [67] la ecuaţii ce invocă operatorul p-Laplacian.

Zhiren Jin [78] studiază direct problema de tip Klein-Gordon (4.1.1) în cazul $c(x) \geq 0$ şi obţine rezultate de existenţă a soluţiilor similare problemei de tip Lane, Emden şi Fowler.

Motivaţi de tehnica demonstraţiei elaborată în *Capitolul 1*, vom obţine, rezultate similare de existenţă a soluţiei, dar printr-o metodă diferită, pentru existenţa soluţiilor problemei (4.1.1). Fără a restrânge generalitatea rezultatelor vom presupune că f este o funcţie singulară în 0, în sensul că $\lim_{s\searrow 0} f(s) = \infty$.

Înainte de a trece la enunţarea şi demonstrarea rezultatului principal al capitolului vom introduce câteva rezultate preliminare.

4.2 Rezultate preliminare

În obţinerea rezultatelor vom aplica metoda sub şi super-soluţiilor în forma dată de ShangBin Cui [37]. Este necesar să definim noţiunea de sub şi super-soluţie în sensul referinţei [37].

Pentru $f_1 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ShangBin Cui introduce următoarele definiţii:

Definiţia 4.2.1 *Se numeşte sub-soluţie a problemei*

$$\begin{aligned} &-\Delta u = f_1(x, u, \nabla u) \text{ în } \Omega, \; u > 0 \text{ în } \Omega, \\ &u = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

o funcţie $\underline{u} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ *ce verifică*

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &\leq f_1(x, \underline{u}, \nabla \underline{u}) \text{ în } \Omega, \; \underline{u} > 0 \text{ în } \Omega, \\ \underline{u} &= 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definiţia 4.2.2 *Se numeşte super-soluţie a problemei (4.2.1) o funcţie* $\overline{u} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ *ce verifică*

$$\begin{aligned} -\Delta \overline{u} &\geq f_1(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \text{ în } \Omega, \; \overline{u} > 0 \text{ în } \Omega \\ \overline{u} &= 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Rezultatul principal preluat din [37] în forma folosită de noi este:

Lema 4.2.1 *Presupunem că* Ω *este un domeniu mărginit în* $\mathbb{R}^N$ *cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{2,\alpha}$ *pentru* $\alpha \in (0, 1)$ *iar* $f_1 : \Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *este o funcţie cu următoarele proprietăţi:*

(SC1) $f_1(\cdot,\eta,\xi)$ *este local Hölder continuă de exponent* α *în* $\Omega\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ *şi continuu diferenţiabilă în raport cu* η *şi* ξ*;*

(SC2) *pentru orice* $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ *şi orice* $a,b\in(0,\infty)$ *cu* $a<b$ *există o constantă* $C>0$ *ce depinde de* Ω_1*,* a*,* b *astfel încât*

$$|f_1(x,\eta,\xi)| \le C(1+|\xi|^2) \text{ pentru orice } (x,\eta,\xi)\in\overline{\Omega}_1\times[a,b]\times\mathbb{R}^N. \tag{4.2.2}$$

În aceste ipoteze dacă problema (4.2.1) are o sub-soluţie $\underline{u}$ *şi o super-soluţie* $\overline{u}$ *astfel încât* $\underline{u}(x)\le\overline{u}(x)$*,* $\forall x\in\overline{\Omega}$ *atunci există cel puţin o funcţie* $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ *cu proprietatea* $\underline{u}(x)\le u(x)\le\overline{u}(x)$ *oricare ar fi* $x\in\overline{\Omega}$ *şi satisfăcând (4.2.1).*

Următoarea lemă are un rol important în demonstraţia rezultatului principal.

Lema 4.2.2 *Fie* $q\in(0,2]$*,* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *domeniu mărginit cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{2,\alpha}$ *cu* $\alpha\in(0,1)$ *şi* $a,c\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$*,* $a(x)>0, c(x)>0$ *pentru orice* $x\in\overline{\Omega}$*. În aceste ipoteze, pentru orice* $\varsigma>0$ *există o unică funcţie* $u\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *astfel încât*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u + a(x)\,|\nabla u|^q = \varsigma \ \text{în}\ \ \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Demonstraţie: Vom folosi *Lema 3.2.5*. Pentru aceasta, fie $\varphi_1>0$ prima funcţie proprie corespunzătoare primei valori proprii λ_1 a problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \ \text{în}\ \ \Omega,\ u>0 \text{ în } \Omega, \\ u(x)=0 \text{ pentru } x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Este cunoscut că $\varphi_1\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Arătăm că funcţia $\underline{u}=\sigma_1\varphi_1$, unde

$$0<\sigma_1\le\min\left\{\frac{\varsigma}{2\max_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_1[\lambda_1+\max_{x\in\overline{\Omega}}c(x)]},\frac{\varsigma^{1/q}}{2^{1/q}\cdot(\max_{x\in\overline{\Omega}}a(x))^{1/q}\cdot\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla\varphi_1|},1\right\}, \tag{4.2.5}$$

este o sub-soluţie a problemei (4.2.3). Într-adevăr, din (4.2.5) avem

$$\begin{aligned} & -\Delta\sigma_1\varphi_1 + c(x)\sigma_1\varphi_1 + a(x)\,|\nabla\sigma_1\varphi_1|^q \\ = \ & \sigma_1\varphi_1[\lambda_1+c(x)] + a(x)\sigma_1^q\,|\nabla\varphi_1|^q \\ \le \ & \sigma_1\max_{x\in\overline{\Omega}}\varphi_1[\lambda_1+\max_{x\in\overline{\Omega}}c(x)] + \max_{x\in\overline{\Omega}}a(x)\cdot\sigma_1^q\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla\varphi_1|^q \le \frac{\varsigma}{2}+\frac{\varsigma}{2}=\varsigma. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

În ordine, pentru a găsi o super-soluţie a problemei (4.2.3) observăm că funcţia

$$\overline{u}(x) = y(x)\cdot\varsigma \ \text{ pentru } x\in\overline{\Omega},$$

unde $y \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ este unica soluţie a problemei

$$\begin{cases} -\Delta y = 1 \;\; \textit{în} \;\; \Omega, \\ y_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

satisface

$$\varsigma + c(x)\overline{u} + a(x)\left|\nabla \overline{u}\right|^q = -\Delta\overline{u} + c(x)\overline{u} + a(x)\left|\nabla \overline{u}\right|^q \geq \varsigma \text{ în } \Omega.$$

Clar, $\overline{u}$ este o super-soluţie a problemei (4.2.3). Acum, deoarece

$$\begin{cases} -\Delta\left(\overline{u} - \underline{u}\right) = -\lambda_1\sigma_1\varphi_1 + \varsigma \geq -\sigma_1\varphi_1[\lambda_1 + c(x)] + \varsigma \geq 0 \;\; \textit{în} \;\; \Omega, \\ \qquad \overline{u} - \underline{u} = 0 \;\; \textit{pe} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

rezultă din principiul de maxim, *Lema 3.2.4*, că $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$.

Am obţinut o sub-soluţie

$$\underline{u} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

şi o super-soluţie

$$\overline{u} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

pentru problema (4.2.3) astfel încât $\underline{u} \leq \overline{u}$ pe $\overline{\Omega}$ în sensul *Lemei 3.2.5*. Atunci, problema (4.2.3) are cel puţin o soluţie $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ în intervalul $[\underline{u}, \overline{u}]$, fapt ce înseamnă

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \;\; \textit{pentru orice} \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{4.2.8}$$

Aceste inegalităţi arată că $u > 0$ în Ω.

Unicitatea. Presupunem că $u_1(x)$ şi $u_2(x)$ sunt soluţii arbitrare ale problemei (4.2.3). Pentru a demonstra unicitatea, este suficient să arătăm că

$$u_1 \leq u_2 \;\; \textit{în} \;\; \overline{\Omega}.$$

Folosim reducerea la absurd. Notăm

$$\Omega_{u_1,u_2} := \{x \in \Omega \,|w_0(x) := u_1(x) - u_2(x) > 0\},$$

şi presupunem că $\Omega_{u_1,u_2} \neq \varnothing$. În concluzie, putem presupune că

$$\sup w_0(x) \;\; \textit{în} \;\; \Omega \;\; \textit{este pozitiv.}$$

Atunci în punctul $x_0 \in \Omega$ unde $w_0\left(x\right)$ îşi atinge supremumul avem

$$\nabla[u_1(x_0) - u_2(x_0)] = 0. \tag{4.2.9}$$

Folosind relaţia (4.2.9) obţinem

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta w_0(x_0) \\ &= -\varsigma + c(x_0)[u_1(x_0) - u_2(x_0)] + a(x_0)[|\nabla u_1(x_0)|^q - |\nabla u_2(x_0)|^q] + \varsigma \\ &= c(x_0)[u_1(x_0) - u_2(x_0)] > 0, \end{aligned}$$

o contradicţie. Deci

$$u_1 \leq u_2 \text{ în } \overline{\Omega}.$$

Absolut analog (considerând funcţia $w_0 = u_2 - u_1$) avem

$$u_2 \leq u_1 \text{ în } \overline{\Omega}$$

şi deci $u_1 = u_2$ *în* $\overline{\Omega}$. ■

Următorul rezultat poate fi regăsit în [36], [63] într-o formă particulară şi mai general în [137]. Va fi folosit aici în forma:

Lema 4.2.3 *Presupunem că sunt satisfăcute ipotezele Lemei 4.2.2. Dacă în plus* f *satisface (F1) şi există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $u \mapsto f(u)/(u+\varepsilon)$ *este strict descrescătoare pe* $(0,\infty)$ *atunci există o unică funcţie* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ *astfel încât* $u(x) > 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$ *şi* u *verifică*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = a(x)[f(u) + |\nabla u|^s], & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.10}$$

pentru orice $s \in (0,1)$.

Demonstraţie: Fie $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ funcţia proprie corespunzătoare primei valori proprii λ_1 a problemei (4.2.4). Observăm că funcţia $\underline{u} = \varepsilon_1\varphi_1$ este o sub-soluţie a problemei (4.2.10), probat pentru $\varepsilon_1 > 0$ suficient de mic (vezi demonstraţia *Lemei 4.2.2*). Pentru a stabili construcţia unei super-soluţii a lui (4.2.10) fie $h : [0,\eta] \to [0,\infty)$ soluţia problemei

$$\begin{cases} -h''(t) = \frac{f(h(t))}{h(t)}, & 0 < t < \eta < 1, \\ h(0) = 0, \\ h(t) > 0, & 0 < t \leq \eta < 1, \end{cases} \tag{4.2.11}$$

care există din rezultatele lui [2]. Folosind rezultatele din [137] putem observa că există constantele pozitive $M, c_0 > 0$ astfel încât funcţia $\overline{u} = Mh(c_0\varphi_1) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este o super-soluţie a lui (4.2.10). Vom arăta că

$$\underline{u} \leq \overline{u} \text{ în } \overline{\Omega}. \tag{4.2.12}$$

Presupunem contrariul, că inegalitatea $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ nu are loc pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi fie

$$\alpha(x) = \frac{\underline{u}(x) + \varepsilon}{\overline{u}(x) + \varepsilon} - 1 \textit{ pentru } \; x \in \overline{\Omega}.$$

Clar $\alpha = 0$ pe $\partial\Omega$ şi deci α îşi atinge maximul într-un punct $x_0 \in \Omega$. În acest punct, x_0, avem

$$\nabla\alpha(x_0) = 0 \textit{ şi } \Delta\alpha(x_0) \leq 0.$$

Aceasta implică

$$\Big(- (\overline{u} + \varepsilon)\, \Delta\underline{u} + (\underline{u} + \varepsilon)\, \Delta\overline{u} \Big)(x_0) \geq 0.$$

sau echivalent

$$\left(\frac{f(\underline{u})}{\underline{u} + \varepsilon} - \frac{f(\overline{u})}{\overline{u} + \varepsilon} \right)(x_0) + \left(\frac{|\nabla\underline{u}|^s}{\underline{u} + \varepsilon} - \frac{|\nabla\overline{u}|^s}{\overline{u} + \varepsilon} \right)(x_0) \geq 0. \tag{4.2.13}$$

Acum, deoarece $t \longmapsto \frac{f(t)}{t+\varepsilon}$ este descrescătoare pe $(0, \infty)$ şi $\underline{u}(x_0) > \overline{u}(x_0)$, obţinem din (4.2.13) că

$$\left(\frac{|\nabla\underline{u}|^s}{\underline{u} + \varepsilon} - \frac{|\nabla\overline{u}|^s}{\overline{u} + \varepsilon} \right)(x_0) > 0. \tag{4.2.14}$$

Pe de altă parte, $\nabla\alpha(x_0) = 0$ implică

$$(\overline{u}(x_0) + \varepsilon)\, \nabla\underline{u}(x_0) = (\underline{u}(x_0) + \varepsilon)\, \nabla\overline{u}\,(x_0)\,.$$

Mai mult, avem relaţia (4.2.14) din care rezultă

$$(\underline{u}(x_0) + \varepsilon)^{s-1} - (\overline{u}(x_0) + \varepsilon)^{s-1} > 0,$$

fapt ce intră în contradicţie cu $0 < s < 1$. Deci

$$\underline{u} \leq \overline{u} \textit{ în } \overline{\Omega}.$$

Atunci, din metoda sub şi super-soluţiei, *Lema 4.2.1*, găsim cel puţin o soluţie

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$$

a problemei (4.1.1) astfel încât

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \textit{ pentru orice } \; x \in \overline{\Omega}.$$

Cu un argument analog demonstraţiei lui (4.2.12) obţinem unicitatea soluţiei. ■

Problema studiată în următoarea lemă este similară lui (4.1.1).

Lema 4.2.4 *Dacă condiţiile din Lema 4.2.3 sunt îndeplinite, atunci există o unică funcţie* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ *astfel încât* $u(x) > 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$, $u = 0$ *pe* $\partial\Omega$ *şi*

$$-\Delta u + c(x)u = a(x)[f(u) - |\nabla u|^q] \text{ în } \Omega, \tag{4.2.15}$$

pentru orice $q \in [1, 2]$.

Demonstraţie: Fie $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ funcţia proprie valorii proprii λ_1 pentru problema (4.2.4). Deoarece $\lim_{m \searrow 0} f(m) = +\infty$, obţinem pentru $\min_{x \in \overline{\Omega}} a(x)$ şi ς ca în *Lema* 4.2.2, că există $\delta > 0$ astfel încât $\varsigma(\min_{x \in \overline{\Omega}} a(x))^{-1} < f(m), \forall m \in (0, \delta)$.

Acum, fie $\underline{u} = \sigma_2\varphi_1$, unde

$$0 < \sigma_2 < \min\left\{\frac{\delta}{\max_{x \in \overline{\Omega}} \varphi_1(x)}, \sigma_1\right\},$$

şi σ_1 este aceeaşi constantă pozitivă din demonstraţia *Lemei* 4.2.2. Un argument similar lui (4.2.6) implică

$$-\Delta\underline{u} + c(x)\underline{u} + a(x)\left|\nabla\underline{u}\right|^q \le \varsigma < f(\underline{u}) \min_{x \in \overline{\Omega}} a(x) \le a(x)f(\underline{u}),$$

dar aceasta arată că $\underline{u} = \sigma_2\varphi_1$ este o sub-soluţie a problemei (4.2.15). Pentru a construi o super-soluţie, observăm că orice soluţie a problemei

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= a(x)[f(u) + |\nabla u|^q] \text{ în } \Omega, \\ u &> 0 \text{ în } \Omega, \\ u &= 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

este o super-soluţie a problemei (4.2.15). Dar din *Lema* 4.2.3, problema (4.2.16) are cel puţin o soluţie în spaţiul $C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$. Notăm $\overline{u}$ soluţia astfel obţinută. Ca în demonstraţia lui (4.2.12) obţinem

$$\underline{u} \le \overline{u} \text{ în } \overline{\Omega}.$$

Atunci, din metoda sub şi super-soluţiei, *Lema* 4.2.1, găsim cel puţin o soluţie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ a problemei (4.2.15). Un argument analog demonstraţiei lui (4.2.12) implică unicitatea soluţiei. ■

Remarca 4.2.1 *Rezultatele de existenţă din Lemele 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 rămân valabile şi în cazul* $c(x) \ge 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^N$, $t \mapsto f(t)/t$ *strict descrescătoare,* $s \in (0, 1)$, $q \in (0, 2]$.

Remarca de mai sus se poate deduce uşor utilizând argumente ale principiului de maxim (vezi [137]). Cazurile particulare au fost considerate pentru a avea unicitatea soluţiei în domenii mărginite ale lui $\mathbb{R}^N$ fapt ce va fi folosit în stabilirea rezultatelor principale.

Următoarea lemă a fost folosită în forma dată pentru prima dată de autorii referinţei [88].

Lema 4.2.5 *Presupunem că (A3) este îndeplinit. Atunci*

$$\begin{aligned} w(r) &:= K - \int_0^r \xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma d\xi, \\ K &:= \int_0^\infty \xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma d\xi, \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

este unica soluţie cu simetrie radială, pozitivă şi mărginită a problemei

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \varphi(|\,x\,|) \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ w &> 0 \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ w(x) &\to 0 \text{ când } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

În următoarea lemă este prezentată existenţa unei super-soluţii a problemei (4.1.1), ce tinde la zero.

Lema 4.2.6 *(vezi [29, 67]) Fie $\varepsilon > 0$. Presupunem că funcţia a satisface ipotezele (AC1), (AC2), (A3) şi că f are aceleaşi proprietăţi din Lema 4.2.4. Ca o aplicaţie a teoremei funcţiei implicite, există*

$$v^\varepsilon(r) := \Gamma^{-1}(Cw(r)), \; r := |x|$$

o funcţie cu simetrie radială îndeplinind

$$\begin{aligned} -\Delta v^\varepsilon &\geq a(x)f(v^\varepsilon) \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ v^\varepsilon &> 0 \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ v^\varepsilon &\to 0 \text{ când } |x| \to \infty, \end{aligned}$$

unde

$$\Gamma(r) = \int_0^r \frac{s}{\overline{f}(s)}ds, \overline{f}(s) = s^2 / \int_0^s \frac{t}{f(t)}dt,$$

iar Γ^{-1} reprezintă inversa funcţiei Γ pe $[0,\infty)$, C este o constantă pozitivă astfel încât

$$KC \leq \Gamma(C) = \int_0^C \frac{s}{\overline{f}(s)}ds.$$

Încheiem aici rezultatele auxiliare. Rezultatul principal al capitolului este acceptat în [32].

4.3 Rezultatul principal

Teorema 4.3.1 *(vezi [32]) În ipotezele (AC1), (AC2), (A3) şi (F1) problema (4.1.1) are cel puţin o soluţie* $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstraţie: Fie $k = 1, 2, 3, ...$ şi $B_k := \{x \in \mathbb{R}^N \,||x| < k\}$ bila deschisă de centru 0 şi de rază k.

Considerăm următoarea problemă

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= a(x)f(u) \text{ în } B_k, \\ u &> 0 \text{ în } B_k, \\ u &= 0 \text{ pe } \partial B_k, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

şi demonstrăm că ea are cel puţin o soluţie în spaţiul $C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k)$.

Pentru aceasta notăm

$$L_\varepsilon(u(x)) := a(x)[(u(x)+\varepsilon)\underline{f}_\varepsilon(u(x)) - |\nabla u(x)|^s] - c(x)u(x), \; x \in B_k$$

unde $\underline{f}_\varepsilon$ este funcţia corespunzătoare lui $p = 2$ din *Lema 2.2.3*. Observăm că orice soluţie a problemei

$$\begin{aligned} -\Delta u &= L_\varepsilon(u) \text{ în } B_k, \\ u &> 0 \text{ în } B_k, \\ u &= 0 \text{ pe } \partial B_k, \end{aligned}$$

care există din *Lema 4.2.4*, este o sub-soluţie a problemei (4.3.1).

Fie $\overline{f}^\varepsilon$ funcţia corespunzătoare lui $p = 2$ în *Lema 2.2.2*. Notăm

$$L^\varepsilon(u(x)) := a(x)[(u(x)+\varepsilon)(\overline{f}^\varepsilon(u(x)) + \frac{1}{u(x)+\varepsilon}) + |\nabla u(x)|^s] - c(x)u(x), \; x \in B_k.$$

Observăm din *Lema 4.2.3*, că următoarea problemă

$$\begin{aligned} -\Delta u &= L^\varepsilon(u) \text{ în } B_k, \\ u &> 0 \text{ în } B_k, \\ u &= 0 \text{ pe } \partial B_k, \end{aligned}$$

are o unică soluţie şi aceasta este o super-soluţie a problemei (4.3.1).

Notăm $\underline{u_{\varepsilon}}$ (resp. $\overline{u^{\varepsilon}}$) sub-soluţia (resp. super-soluţia) problemei (4.3.1). Clar, din demonstraţia lui (4.3.3) de mai jos, avem şi

$$\underline{u_{\varepsilon}} \leq \overline{u^{\varepsilon}} \textit{ în } \overline{B}_k.$$

Atunci din metoda sub şi super-soluţiei, *Lema 4.2.1*, determinăm cel puţin o soluţie

$$u_k \in C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k),$$

pentru problema (4.3.1), cu proprietatea

$$\underline{u_{\varepsilon}} \leq u_k \leq \overline{u^{\varepsilon}} \textit{ în } B_k. \tag{4.3.2}$$

În afara bilei B_k punem $u_k = 0$. Acum observăm că *Lema 4.2.6* implică existenţa unei funcţii suficient de netedă $v_{\varepsilon} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ce satisface

$$\begin{aligned} -\Delta v_{\varepsilon}(r) + c(x)v_{\varepsilon}(r) &\geq a(x)(v_{\varepsilon}(r) + \varepsilon)\left(\overline{f}^{\varepsilon}(v_{\varepsilon}(r)) + \frac{1}{v_{\varepsilon}(r) + \varepsilon}\right) \geq a(x)f(v_{\varepsilon}(r)) \ , \\ v_{\varepsilon}(r) &: = v_{\varepsilon}(|x|) = v_{\varepsilon}(x) \textit{ cu } \ x \in \mathbb{R}^N, \\ 0 &< v_{\varepsilon}(r) < C_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

cu $C_{\varepsilon} > 0$ constantă determinată şi $v_{\varepsilon}(r) \to 0$ *când* $|x| \to \infty$.

Vom demonstra că

$$u_k\,(x) \leq v_{\varepsilon}\,(x)\,, \ \ x \in \mathbb{R}^N, \, k = 1, 2, 3, ... \tag{4.3.3}$$

ori, echivalent

$$\ln(u_k(x) + \varepsilon) \leq \ln(v_{\varepsilon}\,(x) + \varepsilon), \ x \in \mathbb{R}^N, \, k = 1, 2, 3, ...$$

Presupunem, prin contradicţie, că

$$\Omega_{u_k, v_{\varepsilon}} := \{x \in \mathbb{R}^N \, | w_1(x) := \ln(u_k(x) + \varepsilon) - \ln(v_{\varepsilon}(x) + \varepsilon) > 0\} \neq \varnothing.$$

Atunci putem să observăm că

$$\sup_{\mathbb{R}^N} w_1(x)$$

este pozitiv. În acest caz supremumul este atins în $\mathbb{R}^N$ deoarece avem

$$\lim_{|x| \to \infty} [\ln\left(u_k(x) + \varepsilon\right) - \ln\left(v_{\varepsilon}(x) + \varepsilon\right)] = 0.$$

Un rezultat mai general în această direcţie, privind punctele de extrem, poate fi consultat în cartea lui Dincă [42]. Atunci în punctul $x_0 \in \mathbb{R}^N$ unde supremumul este atins avem

$$\nabla[\ln(u_k(x_0)+\varepsilon) - \ln(v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon)] = 0,$$

sau, echivalent

$$\frac{1}{u_k(x_0)+\varepsilon} \cdot \nabla u_k(x_0) = \frac{1}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon} \cdot \nabla v_\varepsilon(x_0). \tag{4.3.4}$$

Pe de altă parte observăm că

$$t \to \frac{t}{t+\varepsilon} \textit{ pentru orice } t > 0,$$

este o funcţie crescătoare.

Un rezumat al celor de mai sus conclude

$$\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & \Delta w_1(x_0) = \frac{\Delta u_k(x_0)}{u_k(x_0)+\varepsilon} - \frac{|\nabla u_k(x_0)|^2}{[u_k(x_0)+\varepsilon]^2} - \frac{\Delta v_\varepsilon(x_0)}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon} + \frac{|\nabla v_\varepsilon(x_0)|^2}{[v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon]^2} \\
= \quad & \frac{\Delta u_k(x_0)}{u_k(x_0)+\varepsilon} - \frac{\Delta v_\varepsilon(x_0)}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon} \\
\geq \quad & \frac{c(x_0)u_k(x_0) - a(x_0)f(u_k(x_0))}{u_k(x_0)+\varepsilon} + a(x_0)\left(\overline{f}^{\varepsilon}(v_\varepsilon(x_0)) + \frac{1}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon}\right) - \frac{c(x_0)v_\varepsilon(x_0)}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon} \\
= \quad & c(x_0)\left[\frac{u_k(x_0)}{u_k(x_0)+\varepsilon} - \frac{v_\varepsilon(x_0)}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon}\right] - a(x_0)\left[\frac{f(u_k(x_0))}{u_k(x_0)+\varepsilon} - \left(\overline{f}^{\varepsilon}(v_\varepsilon(x_0)) + \frac{1}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon}\right)\right] \\
> \quad & -a(x_0)\left[\frac{f(u_k(x_0))}{u_k(x_0)+\varepsilon} - \overline{f}^{\varepsilon}(u_k(x_0))\right] + a(x_0)\frac{1}{v_\varepsilon(x_0)+\varepsilon} > 0,
\end{aligned}$$

şi deci o contradicţie.

Am obţinut faptul că $\Omega_{u_k, v_\varepsilon} = \varnothing$. Ca o concluzie, (4.3.3) are loc.

În pasul următor vom proceda ca în *Teorema 3.3.1*.

Pentru orice domeniu mărginit $\Omega' \subset \mathbb{R}^N$ cu frontiera sa de clasă $C^{2,\alpha}$ cu $\alpha \in (0,1)$, alegem Ω_1 şi Ω_2 cu frontiera $\partial\Omega_1$ respectiv $\partial\Omega_2$ de clasă $C^{2,\alpha}$ şi K_1 întreg strict pozitiv, astfel încât

$$\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset B_k, k \geq K_1.$$

Notăm că

$$u_k(x) \geq \underline{u_\varepsilon} > 0, \forall x \in B_{K_1}, \tag{4.3.5}$$

unde B_{K_1} este substituentul pentru B_k în (4.3.1).

Fie

$$h_k(x) = a(x)f(u_k(x)) - c(x)u_k(x), x \in \overline{B}_{K_1}.$$

Rezultă din (AC1)-(AC2), (4.3.3) şi (4.3.5) că $\{h_k\}_{K_1}^{\infty}$ este uniform mărginită pe $\overline{\Omega}_2$ şi deci

$$h_k \in L^p(\Omega_2) \;\; pentru\ orice\ p > 1.$$

Deoarece

$$-\Delta u_k(x) = h_k(x)\ pentru\ x \in B_{K_1}, \tag{4.3.6}$$

are loc, observăm că *Lema 3.2.3* ne furnizează cel puţin o constantă pozitivă C_1 independentă de k astfel încât

$$\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega_1)} \leq C_1(\|h_k(x)\|_{L^p(\Omega_2)} + \|u_k\|_{L^p(\Omega_2)}), \forall k \geq K_1,$$

ceea ce înseamnă că $\{\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega_1)}\}_{K_1}^{\infty}$ este uniform mărginit.

Acum alegem p astfel încât

$$p > N \ şi\ p > N\left(1-\alpha\right)^{-1}.$$

Atunci, din teorema de scufundare a lui Sobolev, *Lema 3.2.1,* deducem că

$$\left\{\|u_k\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)} \left| k \geq K_1 \right.\right\}$$

este uniform mărginit de o constantă independentă de k, fapt ce implică

$$\{\|h_k\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)}\}_{K_1}^{\infty}$$

este uniform mărginit. Atunci, ca o aplicaţie a *Lemei 3.2.2*, avem că există o constantă $C_2 > 0$ independentă de k astfel încât

$$\|u_k\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C_2\left(\|h_k\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)} + \|u_k\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega}_1)}\right), \forall k \geq K_1,$$

fapt ce atrage că

$$\left\{\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \left| k \geq K_1 \right.\right\} \tag{4.3.7}$$

este uniform mărginit. Deoarece şirul $\{u_k\}$ este mărginit în norma lui $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}'\right)$ deducem din teoremele lui Ascoli-Arzela existenţa unui subşir $\{u_{k_j}\}$ a lui $\{u_k\}$ şi a unei funcţii $u \in C^2\left(\overline{\Omega}'\right)$ astfel încât

$$\left\|u_{k_j} - u\right\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \to 0,$$

uniform pentru $j \to \infty$. Mai mult, din (4.3.1) rezultă că u satisface ecuaţia

$$-\Delta u = a(x)f(u) - c(x)u \ în\ \overline{\Omega}'. \tag{4.3.8}$$

Din (4.3.5), obţinem că

$$u > 0 \textit{ pentru orice } x \in \overline{\Omega}'.$$

Aplicând rezultatele de estimare în interior ale lui Schauder în (4.3.8) vedem că

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}').$$

Deoarece Ω' este ales arbitrar, obţinem că

$$u_{k_j} \longrightarrow u \textit{ (punctual) în } C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

şi

$$u > 0 \textit{ în } \mathbb{R}^N.$$

Cum (4.3.3) are loc obţinem că

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Aceste relaţii încheie demonstraţia *Teoremei 4.3.1.* ■

Remarca 4.3.1 *Teorema 4.3.1 acoperă clasele de funcţii*

$$f(u) = u^{-\gamma} + u^{\delta}(\cos u + 1)/2, \textit{ cu } \gamma, \delta \in (0,1)$$

şi respectiv

$$f(u) = u^{\gamma+1}[\ln(u+1)]^{-1} + \sin\psi(u) + 2 \textit{ unde } -1 < \gamma < 0 \textit{ iar } \psi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Încheiem capitolul cu un ultim rezultat:

Remarca 4.3.2 *Fie $s \in (0,1)$, $q \in (0,2]$. Dacă ipotezele Teoremei 4.3.1 sunt îndeplinite atunci problema de tip Lane, Emden şi Fowler cu termenul gradient mixt*

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= a(x)[f(u) - |\nabla u|^q + |\nabla u|^s] \textit{ în } \mathbb{R}^N, \\ u &> 0 \textit{ în } \mathbb{R}^N, \\ u(x) &\to 0 \textit{ când } |x| \to \infty, \end{aligned} \qquad (4.3.9)$$

are cel puţin o soluţie $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstraţie: Considerăm următoarea problemă

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= a(x)[f(u) - |\nabla u|^q + |\nabla u|^s] \textit{ în } B_k, \\ u &> 0 \textit{ în } B_k, \\ u &= 0 \textit{ pe } \partial B_k. \end{aligned} \qquad (4.3.10)$$

Vom folosi din nou metoda sub şi super-soluţiei datorată lui ShangBin Cui, *Lema 4.2.1*, pentru a obţine existenţa soluţiei lui (4.3.10). Pentru aceasta, fie

$$\underline{u_\varepsilon} \in C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k)$$

respectiv

$$\overline{u^\varepsilon} \in C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k)$$

aceleaşi funcţii construite în *Teorema* 4.3.1.

Observăm că $\underline{u_\varepsilon}$ satisface

$$\begin{aligned} -\Delta\underline{u_\varepsilon} + c(x)\underline{u_\varepsilon} &\leq a(x)[f(\underline{u_\varepsilon}) - \left|\nabla \underline{u_\varepsilon}\right|^q + \left|\nabla \underline{u_\varepsilon}\right|^s] \text{ în } B_k, \\ \underline{u_\varepsilon} &> 0 \text{ în } B_k, \\ \underline{u_\varepsilon}_{|\partial B_k} &= 0 \end{aligned}$$

adică, $\underline{u_\varepsilon}$ este o sub-soluţie a problemei (4.3.10).

Pe de altă parte funcţia $\overline{u^\varepsilon}$ verifică

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u^\varepsilon} + c(x)\overline{u^\varepsilon} &\geq a(x)[f(\overline{u^\varepsilon}) - |\nabla \overline{u^\varepsilon}|^q + |\nabla \overline{u^\varepsilon}|^s] \text{ în } B_k, \\ \overline{u^\varepsilon} &> 0 \text{ în } B_k, \\ \overline{u^\varepsilon}_{|\partial B_k} &= 0 \end{aligned}$$

adică, $\overline{u^\varepsilon}$ este o super-soluţie a problemei (4.3.10).

Clar, argumentele din demonstraţia *Teoremei 4.3.1* confirmă

$$\underline{u_\varepsilon} \leq \overline{u^\varepsilon} \text{ în } B_k.$$

Aplicând metoda sub şi super-soluţiei găsim cel puţin o soluţie

$$u_k \in C(\overline{B}_k) \cap C^{2+\alpha}(B_k),$$

a problemei (4.3.10) astfel încât

$$\underline{u_\varepsilon}(x) \leq u_k(x) \leq \overline{u^\varepsilon}(x) \text{ pentru orice } x \in \overline{B}_k.$$

Concluzia finală poate fi obţinută urmând paşii din *Teorema* 4.3.1 şi *Teorema* 3.3.2. ■

Menţionăm aici că probleme similare lui (4.3.10) au fost propuse de autorii Kusano, Swanson şi Usami în [85] respectiv de autorii Noussair şi Swanson în [114] într-o formă particulară.

4.4 Comentarii

Demonstraţiile de mai sus pot fi adaptate şi cazului când f nu este neapărat o funcţie singulară în 0. În referinţa [6] autorul caracterizează procese de reacţie difuzie prin ecuaţii dezbătute în această secţiune. Necunoscuta $u \geq 0$ este văzută ca fiind densitatea unui reactant. În referinţa [94] autorii arată că aceste tipuri de probleme apar în teoria controlului stochastic. Varietatea aplicaţiilor practice în care aceste tipuri de probleme apar impune studiul lor permanent. Astfel, există un interes continuu în stabilirea existenţei soluţiilor problemelor dezbătute.

Capitolul 5

Rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru o problemă semiliniară de tip Lane, Emden şi Fowler cu funcţia neliniară depinzând de termenul gradient

5.1 Introducere

Scopul acestui capitol este de a obţine rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiilor pentru problema $(P-)$ din următoarea clasă de probleme:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)\left(g(u) \pm |\nabla u|^{q}\right) & \text{în } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ în } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ când } x \to \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

unde $N > 2$, $0 < q < 2$, $\lambda > 0$ este un parametru şi $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ sau $\Omega = \mathbb{R}^N$. Pentru $\Omega = \mathbb{R}^N$ condiţia $u(x) = 0$ *când* $x \to \partial\Omega$ înseamnă $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Vom presupune, în plus, că $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface următoarele proprietăţi:

(A1) $a \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pentru $\alpha \in (0,1)$;

(A2) $a(x) > 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^N$;

(A3) pentru $\varphi(r) = \max_{|x|=r} a(x)$ avem

$$\int_0^\infty r\varphi(r)dr < \infty,$$

şi că funcţia neliniară $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ satisface:

(g1) $\lim\limits_{t\searrow 0}\frac{g(t)}{t} = g_0 = \infty$;

(g2) $\lim\limits_{t\nearrow\infty}\frac{g(t)}{t} = g_\infty \in [0,\infty]$.

În fizică problema de tip Lane, Emden şi Fowler (5.1.1) apare în teoria câmpurilor neliniare. Deoarece, ecuaţiile de tip Lane–Emden-Fowler au aplicaţii semnificative în multe domenii ale ştiinţei, o varietate de forme ale problemelor (5.1.1) au fost intensiv studiate de mai mulţi cercetători (vezi spre exemplu [22, 32, 57, 63, 119, 120]).

Studiul nostru este motivat de recentele lucrări ale autorilor Chai, Niu şi Zhao [22], Goncalves şi Silva [70] şi autorului [32] unde existenţa soluţiei pentru probleme ca (4.1.1) este determinată.

Vom menţiona câteva din rezultatele obţinute în lucrarea [70] ce conţine unul din cele mai importante rezultate de existenţă a soluţiilor pentru problemele de tip Lane, Emden şi Fowler. Goncalves şi Silva au investigat existenţa a cel puţin unei soluţii pozitive pentru ecuaţia $(P+)$ în cazul $N \geq 3$, $0 < q < 1$ şi λ parametru strict pozitiv, funcţia a satisface (A1)-(A3) iar $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este de clasă C^1 şi îndeplineşte (g1)-(g2).

Notăm, mai mult, că pentru cazul $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ problema $(P+)$ nu este studiată în prezenţa condiţiilor Dirichlet omogene. Cu alte cuvinte, ecuaţia $(P+)$ este studiată de autorii referinţei [70] doar în cazul $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Sub condiţia suplimentară $s \longmapsto g(s)/s$ este strict descrescătoare în $(0, \infty)$ rezultate similare au fost obţinute în lucrarea [22] când Δ este înlocuit de operatorul Δ_p şi când termenul gradient lipseşte.

Acum, reamintim rezultate recente strict legate de interesul prezentului capitol. A fost demonstrat în [46] că dacă (A1)-(A3) au loc atunci problema $(P-)$ admite o unică soluţie în ipoteza că $g(s) := s^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Mai recent a fost arătat în [32], că dacă (A1)-(A3) au loc atunci $(P-)$ admite cel puţin o soluţie sub condiţiile $\lambda = 1$, $g_0 = \infty$ şi $g_\infty = 0$. Aceste ultime condiţii apar în cartea lui Littlewood [91] unde el propune studiul mărginirii tuturor soluţiilor unei probleme similare lui (5.1.1).

Motivaţi de recentele rezultate din [22] sau [70] în cazul problemei (P+) sau de tip (P+) în care s-a stabilit existenţa a cel puţin unei soluţii sub ipoteza că a este pozitivă şi local Holder continuă iar g este de clasă C^1 satisfăcând (g1)-(g2) vom obţine în acest capitol rezultate de existenţă a soluţiei pentru problema $(P-)$ similare celor obţinute în [70]. Mai mult, scopul nostru este să considerăm ecuaţia $(P-)$ în fiecare mulţime Ω anunţată. Deci, rezultatele noastre extind principalele rezultate din [46] şi unul din rezultatele din [32]. Mai mult noi direcţii vor fi descoperite în cazul ambelor probleme $(P\pm)$.

Rezultatul de existenţă obţinut pentru problema (5.1.1) se bazează pe principiul comparaţiei, metoda sub şi super-soluţiilor precum şi pe câteva idei din [22, 32, 70].

Structura acestui capitol este după cum urmează: În Secţiunea 5.2 vom da câteva leme suplimentare. Rezervăm Secţiunea 5.3 rezultatelor principale.

5.2 Rezultate preliminare

Pentru început vom prezenta câteva definiţii ce pot fi consultate în lucrarea lui ShangBin Cui (vezi [37]).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

Definiţia 5.2.1 *O funcţie $\overline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ se numeşte super-soluţie pentru problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda a(x)\left(g(u) - |\nabla u|^q\right) \text{ în } \Omega, \\ u &> 0 \text{ în } \Omega, \\ u &= 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

dacă

$$\begin{aligned} -\Delta \overline{u} &\geq \lambda a(x)\left(g(\overline{u}) - |\nabla \overline{u}|^q\right) \text{ în } \Omega, \\ \overline{u} &> 0 \text{ în } \Omega, \\ \overline{u} &= 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definiţia 5.2.2 *O funcţie $\underline{u} \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ se numeşte sub-soluţie pentru problema (5.2.1) dacă*

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} &\leq \lambda a(x)\left(g(\underline{u}) - |\nabla \underline{u}|^q\right) \text{ în } \Omega, \\ \underline{u} &> 0 \text{ în } \Omega, \\ \underline{u} &= 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Următoarea lemă ne este folositoare.

Lema 5.2.1 *(vezi [37]) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Presupunem că problema (5.2.1) are o super-soluţie $\overline{u}$ şi o sub-soluţie $\underline{u}$ astfel încât $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$, atunci problema (5.2.1) are cel puţin o soluţie $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ $(\alpha \in (0,1))$ astfel încât $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ în $\overline{\Omega}$.*

Următorul rezultat poate fi regăsit în [64] într-o formă mai generală.

Lema 5.2.2 *Dacă a satisface (A1), (A2) iar* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *este un domeniu mărginit cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ *atunci*

$$\begin{aligned} -\Delta w_1 &= a(x) \text{ în } \Omega, \\ w_1 &> 0 \text{ în } \Omega, \\ w_1 &= 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

are o unică soluţie $w_1 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Mai mult, există constantele* $l_1 \geq k_1 > 0$, *astfel încât* $k_1 d(x) \leq w_1(x) \leq l_1 d(x)$ *pentru orice* $x \in \overline{\Omega}$, *unde* $d(x)$ *denotă distanţa de la* $x \in \Omega$ *la frontiera* $\partial\Omega$.

Un instrument indispensabil în demonstraţiile noastre este următorul rezultat:

Lema 5.2.3 *(vezi [70]) Dacă* $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ *este o funcţie de clasă* C^1 *ce satisface (g1)-(g2) cu* $g_0 = \infty$ *şi* $0 \leq g_\infty < \infty$ *atunci există funcţiile de clasă* C^1 *notate* $\overline{g^g}, \underline{g_g} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *astfel încât:*

i) $\underline{g_g}(s) \leq \frac{g(s)}{s} \leq \overline{g^g}(s)$ *oricare ar fi* $s > 0$;

ii) $\underline{g_g}$, $\overline{g^g}$ *sunt funcţii descrescătoare;*

iii) $\overline{g^g}(s) \to g_\infty$ *când* $s \to \infty$;

iv) $\underline{g_g}(s) \to g_0$ *când* $s \to \infty$.

În următoarea lemă va fi probată existenţa unei super-soluţii pentru problema $(P-)$.

Lema 5.2.4 *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domeniu mărginit cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $0 < q \leq 2$ *şi* $\lambda > 0$. *Presupunem că (A1)-(A2) şi (g1)-(g2) au loc. În aceste ipoteze există constantele* $\Lambda^*_{i_{i:=\overline{0,1}}} \in (0,\infty)$ *astfel încât dacă una din următoarele condiţii*

$$\begin{aligned} &i) \quad g_0 = \infty, 0 \leq g_\infty < \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_0^*; \\ &ii) \quad g_0 = g_\infty = \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_1^*, \end{aligned}$$

are loc, atunci există constanta strict pozitivă $\mu^* := \mu^*(\lambda)$ *şi funcţia* $v^* := v^*_\lambda \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ *cu* $|v^*_\lambda|_\infty = \mu^*$ *satisfăcând*

$$\begin{cases} -\Delta v^* \geq \lambda a(x)\left(g(v^*) - |\nabla v^*|^q\right) \text{ în } \Omega, \\ v^* > 0 \text{ în } \Omega, \\ v^*(x) = 0 \text{ când } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Demonstraţie: *Verificarea afirmaţiei i)*. Fie $w_1 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ unica soluţie pentru problema (5.2.2) şi w^* funcţia definită prin

$$w^*(x) := \lambda w_1(x) \text{ pentru orice } x \in \overline{\Omega}. \tag{5.2.4}$$

Notăm

$$a_0 := \max_{x\in\overline{\Omega}} w_1(x) \text{ şi } \Lambda_0^* = \frac{1}{a_0}\frac{1}{g_\infty}. \tag{5.2.5}$$

Alegem $\lambda \in (0, \Lambda_0^*]$ şi considerăm pentru început funcţia

$$H^*_{\overline{g^g}}(y) := \frac{1}{a_0 y}\int_0^y \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz,\ \ y > 0$$

unde $h_{\overline{g^g}}(z) := z\left(\overline{g^g}(z) + \frac{1}{z}\right)$, $z > 0$ iar $\overline{g^g}$ este aceeaşi funcţie din *Lema 5.2.3*. Observăm că

$$\lim_{y\to\infty} H^*_{\overline{g^g}}(y) = \lim_{y\to\infty}\frac{\int_0^y \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz}{a_0 y} = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{a_0}\frac{y}{h_{\overline{g^g}}(y)} = \frac{1}{a_0 g_\infty} = \Lambda_0^*, \tag{5.2.6}$$

şi

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{a_0 y}\int_0^y \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz = 0. \tag{5.2.7}$$

Din relaţiile (5.2.6) şi (5.2.7) deducem că, pentru orice $\lambda \in (0, \Lambda_0^*]$ există $\mu^* \in (0,\infty)$ astfel încât

$$H^*_{\overline{g^g}}(\mu^*) = \lambda, \tag{5.2.8}$$

sau, echivalent

$$\frac{1}{\mu^*}\int_0^{\mu^*}\frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)}dt = \lambda a_0. \tag{5.2.9}$$

Definim $I^* : \overline{\Omega} \times [0, \mu^*] \to \mathbb{R}$, prin

$$I^*(x,s) = w^*(x) - \frac{1}{\mu^*}\int_0^s \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz, \tag{5.2.10}$$

şi observăm că

$$\frac{\partial I^*(x,s)}{\partial s} = -\frac{1}{\mu^*}\frac{s}{h_{\overline{g^g}}(s)} < 0,\ \ s > 0,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Aceasta imediat implică că I^* este funcţie bijectivă în raport cu s şi deci, conform [19, 106] obţinem că există o unică funcţie $v^* : \overline{\Omega} \to [0, \mu^*]$ ce aparţine spaţiului $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ astfel încât

$$I^*(x, v^*(x)) = 0,\ \ x \in \overline{\Omega},$$

sau echivalent

$$w^*(x) = \frac{1}{\mu^*}\int_0^{v^*(x)}\frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz, \tag{5.2.11}$$

este bine definită. Acum deoarece $w^*(x) = 0$ *când* $x \to \partial\Omega$ rezultă din (5.2.11) că $v^*(x) = 0$ *când* $x \to \partial\Omega$. Desigur, rămâne să probăm că

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} v^*(x) = \mu^* \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{5.2.12}$$

Din (5.2.4) şi (5.2.5) găsim în punctul x_0, unde maximumul este atins că $w^*(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} w^*(x) = \lambda a_0$ iar din (5.2.9) - (5.2.11) avem

$$w^*(x_0) = \lambda a_0 = \frac{1}{\mu^*}\int_0^{\mu^*} \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz \geq \; w^*(x) = \frac{1}{\mu^*}\int_0^{v^*(x)} \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz,$$

şi

$$I^*(x_0,\mu^*) = w^*(x_0) - \frac{1}{\mu^*}\int_0^{\mu^*} \frac{z}{h_{\overline{g^g}}(z)}dz = 0$$

deci (5.2.12) pentru $\mu^* = v^*(x_0)$. Arătăm că v^* construită în (5.2.11) este o super-soluţie pentru problema $(P-)$.

Derivînd în (5.2.11) în raport cu x avem

$$-\Delta v^* \geq \lambda a(x)\, v^* \left(h_{\overline{g^g}}(v^*) + \frac{1}{v^*}\right) \; \textit{în } \Omega.$$

Combinând cele obţinute avem următoarele

$$\begin{aligned} -\Delta v^* \;&\geq\; \lambda a(x)\left(g(v^*) - |\nabla v^*|^q\right) \; \textit{în } \Omega, \\ v^* \;&>\; 0 \; \textit{în } \Omega, \\ v^*(x) \;&\to\; 0 \; \textit{când } x \to \partial\Omega, \end{aligned}$$

fapt ce a probat (i).

Verificarea afirmaţiei ii). Observăm că există $m > 0$ astfel încât

$$\phi(s) := \begin{cases} g(s) \; \textit{dacă } 0 < s \leq m \\ I_m s \; \textit{dacă } s > m, \end{cases}$$

este o funcţie de clasă $C^1((0,\infty),(0,\infty))$, $\frac{\phi(s)}{s} \to \infty$ *când* $s \to 0$ şi $\frac{\phi(s)}{s} \to I_m$ *când* $s \to \infty$ demonstrat pentru $I_m := \inf_{s>0} \frac{g(s)}{s} = \frac{g(m)}{m}$ (vezi de exemplu [70]).

Considerăm

$$H^*_{\overline{g^\phi}}(y) := \frac{1}{a_0 y}\int_0^y \frac{z}{h_{\overline{g^\phi}}(z)}dz, \; y > 0$$

unde $h_{\overline{g^\phi}}(z) := z\left(\overline{g^\phi}(z) + \frac{1}{z}\right)$ şi $\overline{g^\phi}$ este funcţia analoagă din *Lema 5.2.3* ce corespunde lui ϕ.

Fie

$$\Lambda_1^* := \min\left\{\frac{1}{a_0}\frac{1}{I_m}, H^*_{\overline{g^\phi}}(m)\right\}.$$

Ca în verificarea afirmaţiei i) rezultă că, alegând un număr $\lambda \in (0, \Lambda_1^*]$ putem găsi $\mu^* := \mu^*(\lambda) \in (0, m]$ şi o funcţie $v^* : \overline{\Omega} \to [0, \mu^*]$ astfel încât

$$\begin{aligned} -\Delta v^* &\geq \lambda a\,(x)\, h_{\overline{g^\phi}}(v^*) \geq \lambda a(x)\,(g\,(v^*) - |\nabla v^*|^q) \ \textit{ în } \Omega, \\ v^* &> 0 \textit{ în } \Omega, \\ v^*(x) &= 0 \textit{ când } x \to \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aceasta încheie demonstraţia lemei. ■

Următorul obiectiv al secţiunii este de a demonstra existenţa unei super-soluţii pentru problema $(P-)$ în $\mathbb{R}^N$.

Lema 5.2.5 *Fie* $0 < q \leq 2$ *şi* $\lambda > 0$. *Presupunem că (A1)-(A3) şi (g1)-(g2) au loc. În aceste ipoteze există constantele strict pozitive* $\Lambda_{i_{i:=\overline{0,1}}} \in (0, \infty)$ *astfel încât dacă una din următoarele condiţii*

$$\begin{array}{ll} i) & g_0 = \infty, 0 \leq g_\infty < \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_0; \\ ii) & g_0 = g_\infty = \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_1, \end{array}$$

are loc, atunci există constanta strict pozitivă $\mu := \mu\,(\lambda)$ *şi o funcţie cu simetrie radială* $v := v_\lambda \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *cu* $|v_\lambda|_\infty = \mu$ *satisfăcând*

$$\begin{cases} -\Delta v \geq \lambda a(x)\,(g(v) - |\nabla v|^q) \ \textit{ în } \mathbb{R}^N, \\ v > 0 \ \textit{ în } \mathbb{R}^N, \\ v(x) \to 0 \ \textit{ când } \ |x| \to \infty. \end{cases} \tag{5.2.13}$$

Demonstraţie: *Verificarea afirmaţiei i).* Considerăm

$$\Psi(\xi) := \xi^{1-N} \int_0^\xi \sigma^{N-1}\varphi(\sigma)d\sigma, \ \xi > 0.$$

Un calcul simplu arată că

$$\lim_{\xi\to 0} \Psi(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \Psi(\xi) = 0.$$

Relaţia de mai sus arată că Ψ este mărginită pe $(0, \infty)$ şi că ea poate fi extinsă prin continuitate în origine alegând $\Psi(0) = 0$. Integrând $\Psi(\xi)$ de la 0 la ∞ şi folosind regula lui L'Hospital ca în [88] avem

$$\int_0^\infty \Psi(\xi)d\xi = \frac{1}{N-2}\int_0^\infty r\varphi(r)dr := K.$$

Fie $\Lambda_0 = 1/Kg_\infty$ şi $\lambda \in (0, \Lambda_0]$. Definim $w\left(|x|\right) := w_\lambda\left(|x|\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$ prin

$$w(r) := \lambda \left(\int_0^\infty \Psi(\xi) d\xi - \int_0^r \Psi(\xi) d\xi \right) = \lambda \int_r^\infty \Psi(\xi) d\xi, \ r := |x| > 0. \tag{5.2.14}$$

Deoarece funcţia $w\left(r\right)$ este definită prin (5.2.14) rezultă că

$$w(0) = \lambda K \tag{5.2.15}$$

şi că w satisface

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \lambda \varphi\left(|x|\right) \ \textit{în} \ \mathbb{R}^N, \\ w &> 0 \ \textit{în} \ \mathbb{R}^N, \\ w\left(|x|\right) &\to 0 \ \textit{când} \ |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Considerăm funcţia continuă

$$H_{\overline{g^g}}\left(r\right) := \frac{1}{Kr} \int_0^r \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt, \ r > 0$$

unde $h_{\overline{g^g}}(t) := t\left(\overline{g^g}(t) + \frac{1}{t}\right), \ t > 0$. Din argumente similare demonstraţiei *Lemei 5.2.4* vedem că

$$\lim_{r\to\infty} H_{\overline{g^g}}\left(r\right) = \frac{1}{Kg_\infty} = \Lambda_0, \tag{5.2.17}$$

şi

$$\lim_{r\to 0} H_{\overline{g^g}}\left(r\right) = 0. \tag{5.2.18}$$

Folosind (5.2.17) şi (5.2.18) rezultă că pentru orice $\lambda \in (0, \Lambda_0]$ există $\mu \in (0, \infty)$ astfel încât

$$H_{\overline{g^g}}\left(\mu\right) = \lambda,$$

sau, echivalent

$$\frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt = \lambda K. \tag{5.2.19}$$

Ca mai sus, definim funcţia $I : [0, \infty) \times [0, \mu] \to \mathbb{R}$, prin

$$I(t, s) = w(t) - \frac{1}{\mu} \int_0^s \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt.$$

Rezultă că

$$I(t, 0) = w(t) > 0 \ \textit{pentru} \ t \geq 0,$$

şi din (5.2.19) şi (5.2.14) că

$$I(t, \mu) = w(t) - \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt < 0.$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial I(t, s)}{\partial s} = -\frac{1}{\mu} \frac{s}{h_{\overline{g^g}}(s)} < 0, \ s > 0.$$

Atunci există funcţia $v : [0, \infty) \to [0, \mu]$ astfel încât

$$I(r, v(r)) = 0, \quad r > 0,$$

sau, echivalent

$$w(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^{v(r)} \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt. \tag{5.2.20}$$

Poate fi arătat acum, ca în demonstraţia *Lemei 5.2.4* că

$$v \leq \mu.$$

Pe de altă parte, derivînd relaţia (5.2.20) în raport cu r găsim

$$\nabla v = \mu \varphi\left(r\right) \frac{h_{\overline{g^g}}(v)}{v} \nabla w \tag{5.2.21}$$

şi, mai mult, derivînd în (5.2.21) obţinem, folosind şi proprietatea

$$s \longmapsto h_{\overline{g^g}}(s)/s$$

este descrescătoare, că

$$-\Delta v \geq -\mu \frac{h_{\overline{g^g}}(v)}{v} \Delta w. \tag{5.2.22}$$

Folosind (5.2.16) şi (5.2.22) avem

$$-\Delta v \geq \lambda \mu \frac{h_{\overline{g^g}}\left(v\right)}{v} \varphi\left(r\right) \geq \lambda h_{\overline{g^g}}(v) \varphi\left(r\right).$$

Această inegalitate a demonstrat că

$$-\Delta v \geq \lambda a(x) \left(g\left(v\right) - \left|\nabla v\right|^q\right),$$

relaţie ce are loc în $\mathbb{R}^N$. Acum, deoarece $w(r) \to 0$ *când* $r \to \infty$ rezultă din (5.2.20) că $v(r) \to 0$ *când* $r \to \infty$. Pe de altă parte $w(0) = \lambda K$, şi deci din (5.2.20), (5.2.14) şi (5.2.19) avem

$$w(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt$$

respectiv

$$w(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{v(0)} \frac{t}{h_{\overline{g^g}}(t)} dt.$$

Deoarece $v\left(0\right) = \mu$ şi v este cu simetrie radială avem că $\left|v_\lambda\right|_\infty = \mu$. Aceasta încheie demonstraţia lui (i).

Verificarea afirmaţiei ii). Observăm că există $m > 0$ astfel încât

$$\phi(s) := \begin{cases} g(s) \ \textit{dacă} \ 0 < s \leq m \\ I_m s \ \textit{dacă} \ s > m, \end{cases}$$

este o funcţie de clasă $C^1((0,\infty),(0,\infty))$, $\frac{\phi(s)}{s} \to \infty$ *când* $s \to 0$ şi $\frac{\phi(s)}{s} \to I_m$ *când* $s \to \infty$ demonstrat pentru $I_m := \inf_{s>0} \frac{g(s)}{s} = \frac{g(m)}{m}$ (vezi de exemplu [70]).

Punem

$$H_{\overline{g^\phi}} := \frac{1}{Kr}\int_0^r \frac{t}{h_{\overline{g^\phi}}(t)}dt,\ r>0$$

pentru $h_{\overline{g^\phi}}(t) := t\left(\overline{g^\phi}(t)+\frac{1}{t}\right)$ şi $\overline{g^\phi}$ funcţia analoagă din *Lema 5.2.3*.

Fie

$$\Lambda_1 := \min\left\{\frac{1}{KI_m}, H_{\overline{g^\phi}}(m)\right\}$$

şi alegem $\lambda \in (0,\Lambda_1]$. Un argument similar demonstraţiei afirmaţiei i) conclude că există $\mu := \mu(\lambda) \in (0,m]$ şi o funcţie $v : [0,\infty) \to [0,\mu]$ astfel încât

$$\begin{aligned} -\Delta v &\geq \lambda h_{\overline{g^\phi}}(v)\varphi(r) \geq \lambda a(x)\left(g(v) - |\nabla u|^q\right) \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ v &> 0 \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ v(r) &\to 0 \text{ când } r\to\infty, \end{aligned}$$

şi demonstraţia este completă. ■

În cele ce urmează vor fi folosite: Notăm prin $\xi_1(a,\Omega)$ valoarea proprie corespunzătoare funcţiei proprii strict pozitive $\omega_1(a,\Omega)$ a problemei

$$-\Delta\omega = \xi a(x)\omega \text{ în } \Omega,\ \omega = 0 \text{ pe } \partial\Omega.$$

Mai mult, se ştie că

$$\xi_1(a,\Omega) := \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla\omega|^2 dx}{\int_\Omega a(x)|\omega|^2 dx} \,\middle|\, \omega \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \omega \neq 0\right\}. \tag{5.2.23}$$

Combinând rezultatele acestei secţiuni vom demonstra acum rezultatele principale. Ele se află sub recenzie în [34].

5.3 Rezultate principale

Primul rezultat al acestui capitol, este:

Teorema 5.3.1 *Fie $\lambda > 0$, $0 < q \leq 2$ şi Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă $C^{2,\alpha}$ $\alpha \in (0,1)$. Presupunem că $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ este funcţie de clasă C^1 ce satisface (g1)-(g2) iar $a : \mathbb{R}^N \to R$ îndeplineşte (A1)-(A2). În aceste ipoteze există constantele strict pozitive Λ_0^*, Λ_1^* astfel încât dacă una din următoarele condiţii*

$$\begin{array}{ll} i) & g_0 = \infty,\ 0 \leq g_\infty < \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_0^*; \\ ii) & g_0 = g_\infty = \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda_1^*, \end{array}$$

are loc, atunci există funcţia $u := u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *unde* $\alpha \in (0,1)$, *satisfăcând* $(P-)$ *şi constanta strict pozitivă* $\mu^* := \mu^*_\lambda(\lambda)$ *astfel încât* $u \leq \mu^*$.

Demonstraţie: *Verificarea afirmaţiei i).* Vom începe prin a construi o sub-soluţie pentru ecuaţia $(P-)$. Fie $\lambda \in (0, \Lambda_0^*]$. Pentru a simplifica notaţia în (5.2.23), punem

$$\xi_1(\lambda a) := \xi_1(\lambda a, \Omega),$$

şi

$$\omega_{1,\lambda} := \omega_1(\lambda a, \Omega) \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), \ \alpha \in (0,1).$$

Sub aceste notaţii avem

$$\begin{aligned} -\Delta\omega_{1,\lambda} &= \xi_1(\lambda a)\lambda a(x)\omega_{1,\lambda} \textit{ în } \Omega, \\ \omega_{1,\lambda} &> 0 \textit{ în } \Omega, \\ \omega_{1,\lambda} &= 0 \textit{ pe } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Construim sub-soluţia necesară. Folosim câteva idei din *Lema 4.2.4*. Observăm că ipotezele lui $\underline{g_g}$ garantează existenţa unei constante strict pozitive $\delta := \delta(\lambda) > 0$ astfel încât

$$\underline{g_g}(s) \geq \xi_1(\lambda a)\varepsilon + \max_{x\in\overline{\Omega}}\left\{\varepsilon^q \left|\nabla\omega_{1,\lambda}\right|^q\right\}, \ s \in (0,\delta) \ \textit{cu } \varepsilon := q/(q-1). \tag{5.3.1}$$

Vom arăta că $\underline{u} = c(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon$ unde c este o constantă strict pozitivă cu proprietatea

$$0 < c < \min\left\{1, \frac{\delta}{\left[\max_{x\in\overline{\Omega}}\omega_{1,\lambda}\right]^\varepsilon}\right\}, \tag{5.3.2}$$

este o sub-soluţie pentru $(P-)$. Într-adevăr, această discuţie generală implică

$$\begin{aligned} & -\Delta\underline{u} + a(x)\left|\nabla\underline{u}\right|^q \\ = \ & c\varepsilon(\omega_{1,\lambda})^{\varepsilon-1}\xi_1(\lambda a)\lambda a(x)\omega_{1,\lambda} - c\varepsilon(\varepsilon-1)(\omega_{1,\lambda})^{\varepsilon-2}\left|\nabla\omega_{1,\lambda}\right|^2 + a(x)(c\varepsilon)^q(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon\left|\nabla\omega_{1,\lambda}\right|^q \\ \leq \ & c\varepsilon(\omega_{1,\lambda})^{\varepsilon-1}\xi_1(\lambda a)\lambda a(x)\omega_{1,\lambda} + a(x)c\cdot c^{q-1}\varepsilon^q(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon\left|\nabla\omega_{1,\lambda}\right|^q \\ \leq \ & \lambda c(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon a(x)\left\{\xi_1(\lambda a)\varepsilon + \max_{x\in\overline{\Omega}}\left[\varepsilon^q\left|\nabla\omega_{1,\lambda}\right|^q\right]\right\} \\ \leq \ & \lambda a(x)c(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon\underline{g_g}(c(\omega_{1,\lambda})^\varepsilon) = \lambda a(x)\underline{u}\underline{g_g}(\underline{u}) \leq \lambda a(x)g(\underline{u}) \ \textit{în } \Omega, \end{aligned}$$

demonstrând ce ne-am propus.

Fie $\overline{u} := v_\lambda$ funcţia din *Lema 5.2.4* i). Atunci

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} &\geq \lambda a(x)h_{\overline{g^g}}(\overline{u}) \geq \lambda a(x)g(\overline{u}) \textit{ în } \Omega, \\ \overline{u} &> 0 \textit{ în } \Omega, \\ \overline{u} &= 0 \textit{ pe } \partial\Omega, \end{aligned}$$

adică $\overline{u}$ este o super-soluţie pentru problema $(P-)$.

Vom demonstra că

$$\underline{u}\,(x) \leq \overline{u}\,(x) \;\; \text{în } \Omega. \tag{5.3.3}$$

Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem contrariul: există $x_0 \in \Omega$ astfel încât

$$\underline{u}\,(x_0) > \overline{u}\,(x_0) \;\; \text{în } \Omega. \tag{5.3.4}$$

Mai mult, pentru a verifica (5.3.3), este suficient să observăm că

$$\sup_{x\in\Omega}\left(\ln \underline{u}\,(x) - \ln \overline{u}\,(x)\right) > 0.$$

Atunci în punctul $x_1 \in \overline{\Omega}$ unde supremumul este atins avem

$$\nabla\left(\ln \underline{u}\,(x_1) - \ln \overline{u}\,(x_1)\right) = 0$$

şi

$$\Delta\left(\ln \underline{u}\,(x_1) - \ln \overline{u}\,(x_1)\right) \leq 0.$$

Folosind aceste rezultate obţinem

$$\begin{aligned} 0 \;&\geq\; \Delta \ln \underline{u}\,(x_1) - \Delta \ln \overline{u}\,(x_1) = \frac{\Delta \underline{u}\,(x_1)}{\underline{u}\,(x_1)} - \frac{\Delta \overline{u}\,(x_1)}{\overline{u}\,(x_1)} \\ &\geq\; \frac{-\lambda a(x) \underline{g_g}\left(\underline{u}(x_1)\right) \underline{u}(x_1) + |\nabla \underline{u}(x_1)|^q}{\underline{u}(x_1)} + \frac{\lambda a\,(x)\, h_{\overline{g^g}}\left(\overline{u}(x_1)\right)}{\overline{u}(x_1)} \\ &\geq\; -\lambda a(x) \underline{g_g}\left(\underline{u}(x_1)\right) + \lambda a\,(x) \left(\overline{g^g}\left(\underline{u}(x_1)\right) + \frac{1}{\overline{u}(x_1)}\right) \\ &=\; -\lambda a(x) \left[\underline{g_g}\left(\underline{u}(x_1)\right) - \overline{g^g}\left(\underline{u}(x_1)\right) - \frac{1}{\overline{u}(x_1)}\right] > 0 \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci (5.3.3) este probat.

Atunci *Lema 5.2.1* garantează existenţa unei funcţii $u\,(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{2,\alpha}\,(\Omega)$ astfel încât

$$\underline{u}\,(x) \leq u(x) \leq \overline{u}\,(x) \;\; \textit{pentru orice } x \in \overline{\Omega},$$

satisfăcând $(P-)$ şi demonstraţia lui i) este completă. Argumente similare folosite pentru demonstraţia lui i), conclud ii) (vezi şi [70]). Aceasta încheie demonstraţia *Teoremei 5.3.1*. ■

În cele ce urmează, ne concentrăm atenţia pentru a extinde rezultatul din *Teorema 5.3.1* întregii mulţimi $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5.3.2 *Fie $0 < q \leq 2$ şi $\lambda > 0$. Presupunem că A1)-A3) şi g1)-g2) au loc. În aceste ipoteze există numerele strict pozitive $\Lambda^e_{i_{i=\overline{0,1}}}$, astfel încât dacă una din condiţiile*

$$\begin{aligned} &i) \quad g_0 = \infty, 0 \leq g_\infty < \infty, 0 < \lambda \leq \Lambda^e_0, \\ &ii) \quad g_0 = g_\infty = \infty, \ 0 < \lambda \leq \Lambda^e_1, \end{aligned}$$

este îndeplinită, există o constantă $\mu > 0$ ce depinde doar de λ şi o funcţie $u := u_\lambda \in C^{2,\alpha}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ $\alpha \in (0,1)$ cu $u \leq \mu$ satisfăcând problema $(P-)$. Dacă în plus, $q \in [1,2]$ şi există $\gamma > 0$ astfel încât funcţia $u \longmapsto g(u)/(u+\gamma)$ este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$ atunci soluţia $u := u_\lambda$ este unică.

Demonstraţie: Existenţa. Notăm prin

$$B_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,||x| < n\right\}$$

bila de centru zero şi rază $n \geq 1$ întreg. Alegem

$$\Lambda^e_{i_{i=\overline{0,1}}} = \min\left\{\Lambda_{i_{i=\overline{0,1}}}, \Lambda^*_{i_{i=\overline{0,1}}}\right\}$$

unde $\Lambda_{i_{i=\overline{0,1}}}$ şi $\Lambda^*_{i_{i=\overline{0,1}}}$ sunt aceleaşi constante din *Lemele 5.2.4, 5.2.5*.

Verificarea afirmaţiei i). Fie $\lambda \in (0, \Lambda^e_0]$ şi considerăm problema

$$\begin{aligned} -\Delta u_n &= \lambda a(x)\left(g(u_n) - |\nabla u_n|^q\right) \ \text{în } B_n, \\ u_n &> 0 \text{ în } B_n, \\ u_n &= 0 \text{ pe } \partial B_n. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

În acord cu *Teorema 5.3.1* i) avem că (5.3.6) are cel puţin o soluţie $u_n \in C^2(B_n) \cap C\left(\overline{B}_n\right)$. Acum notăm că

$$0 < \underline{u} \leq u_n \leq \mu^*, \tag{5.3.7}$$

unde $\underline{u}$ este sub-soluţia corespunzătoare lui $\Omega = B_n$ iar μ^* este constanta determinată în *Teorema 5.3.1* i). În afara bilei B_n punem $u_n = 0$. Funcţia rezultată este în $\mathbb{R}^N$. Fie v_λ aceeaşi funcţie din *Lema 5.2.5*. Putem uşor deduce din (5.3.5) că

$$0 < u_n(x) \leq v_\lambda(x) \ \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.3.8}$$

deoarece $v_\lambda > 0$ în $\mathbb{R}^N$ şi $u_n = 0$ în $\mathbb{R}^N \backslash B_k$.

Esenţial, un argument standard, vezi *Capitolul 4*, arată că $\{u_n\}$ conţine un subşir, pe care-l notăm tot prin $\{u_n\}$, astfel încât funcţia definită prin

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x),$$

satisface

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda a(x)\left(g\left(u\right)-\left|\nabla u\right|^{q}\right) \text{ } \textit{în } \Omega', \\ u &> 0 \textit{ în } \Omega', \\ u &\in C^{2}\left(\overline{\Omega'}\right) \end{aligned}$$

pentru orice domeniu mărginit $\Omega' \subset\subset B_k$ cu $\partial\Omega'$ de clasă $C^{2,\alpha}$ $\alpha \in (0,1)$. Mai mult, prin construcţie, rezultă că $u > 0$ în $\overline{\Omega'}$ şi din teoremele de regularitate ale lui Schauder $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega'}\right)$. Ca o consecinţă, $u \in C^{2,\alpha}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Din (5.3.8) obţinem că $\lim_{|x|\to\infty} u\left(x\right) = 0$ şi deci u este o soluţie a problemei $(P-)$.

Verificarea afirmaţiei ii). Selectăm λ astfel încât $\lambda \in (0, \Lambda_1^e]$. Avem din *Teorema 5.3.1* ii) că problema (5.3.6) admite cel puţin o soluţie

$$u_n \in C\left(\overline{B}_n\right) \cap C^2\left(B_n\right),$$

satisfăcând $0 < \underline{u} \leq u_n \leq \mu^*$ în B_n.

Demonstraţia se continuă acum ca în cazul i).

Unicitatea. Presupunem că u şi v sunt soluţii arbitrare ale problemei (4.1.1). Vom arăta că $u \leq v$ sau, echivalent,

$$u\left(x\right) + \gamma \leq v\left(x\right) + \gamma \textit{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^N.$$

Presupunem contrariul. Notăm

$$\alpha(x) := \frac{u\left(x\right)+\gamma}{v\left(x\right)+\gamma} - 1 \textit{ pentru } x \in \mathbb{R}^N.$$

Deoarece avem

$$\lim_{|x|\to\infty} \alpha\left(x\right) = 0$$

deducem că

$$\max_{\mathbb{R}^N} \alpha\left(x\right),$$

există şi este pozitiv. În punctul x_0 unde maximumul este atins

$$\nabla\alpha(x_0) = 0$$

şi

$$\Delta\alpha(x_0) \leq 0,$$

fapt ce implică
$$\Big(-(v+\gamma)\,\Delta u + (u+\gamma)\,\Delta v\Big)(x_0) \geq 0, \tag{5.3.9}$$

şi
$$(v(x_0)+\gamma)\,\nabla u(x_0) = (u(x_0)+\gamma)\,\nabla v\,(x_0)\,. \tag{5.3.10}$$

Din (5.3.9) şi (5.3.10) avem
$$\left(\frac{g(u)}{u+\gamma} - \frac{g(v)}{v+\gamma}\right)(x_0) + \left(\frac{|\nabla v|^q}{v+\gamma} - \frac{|\nabla u|^q}{u+\gamma}\right)(x_0) \geq 0, \tag{5.3.12}$$

sau, echivalent
$$\left(\frac{g(u)}{u+\gamma} - \frac{g(v)}{v+\gamma}\right)(x_0) + \frac{\left[(v(x_0)+\gamma)^{q-1} - (u(x_0)+\gamma)^{q-1}\right]|\nabla u(x_0)|^q}{(u(x_0)+\gamma)^q} \geq 0. \tag{5.3.13}$$

Acum deoarece
$$0 \leq q-1 \leq 1 \text{ şi } u(x_0) > v(x_0)$$

rezultă că
$$(v(x_0)+\gamma)^{q-1} - (u(x_0)+\gamma)^{q-1} \leq 0,$$

Atunci (5.3.13) implică
$$\left(\frac{g(u)}{u+\gamma} - \frac{g(v)}{v+\gamma}\right)(x_0) \geq 0,$$

fapt ce reprezintă o contradicţie cu $t \longmapsto \frac{g(t)}{t+\gamma}$ este funcţie strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. Deci
$$u \leq v \text{ în } \mathbb{R}^N.$$

Absolut analog obţinem
$$v \leq u \text{ în } \mathbb{R}^N.$$

forţând $u(x) = v(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$. Aceasta încheie demonstraţia *Teoremei 5.3.2*.

■

Încheiem secţiunea cu următoarele observaţii.

Remarca 5.3.1 *În acelaşi mod ca mai sus obţinem unicitatea soluţiei pentru problema (P+).*

Remarca 5.3.2 *Teoremele noastre se aplică clasei de funcţii*
$$g_1(s) := 1/s + (2+\cos s) + s$$

caz în care $g_0 = \infty$ *şi* $g_\infty = 1$ *respectiv*
$$g_2(s) := 1/s + s^2\,(2+\sin(1/s)) + s$$

caz în care $g_0 = \infty = g_\infty$.

5.4 Comentarii

Comportamentul asimptotic al soluţiilor în $\mathbb{R}^N$ poate fi obţinut folosind *Lema 5.2.2* şi câteva idei care pot fi găsite în [29]. Un rezultat similar în această direcţie poate fi consultat în [68].

După acest studiu putem constata din referinţa [57] că rezultatele acestui capitol sunt cheia în rezolvarea problemei mai generale

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda f(x,u) - a(x)\,|\nabla u|^q \ \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ u &> 0 \text{ în } \mathbb{R}^N, \\ u\,(x) &\to 0 \text{ când } \ |x| \to \infty, \end{aligned}$$

cu ipoteze adiţionale funcţiei $f(x,u)$.

Capitolul 6

Rezultate de existenţă a soluţiei pentru o problemă eliptică cvasiliniară de tip Bieberbach şi Rademacher în domenii mărginite

6.1 Introducere

Fie $p \in (1, \infty)$ şi $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietăţile:

(G1) $g(0) = 0$, $g(s) > 0$ $\forall s > 0$ şi $g'(s) \geq 0$ $\forall s \geq 0$;

(G2) există $\beta_1 > 0$ astfel încât $\int_{\beta_1}^{\infty} (G(t))^{-1/p}\, dt < \infty$ pentru $G(t) = \int_0^t g(z)dz$.

În acest capitol, ne vom ocupa de studiul soluţiilor pozitive pentru problema eliptică cvasiliniară de următorul tip:

$$\Delta_p u = g(u) \ \text{în}\ \Omega,\ u > 0 \ \text{în}\ \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = \infty, \tag{6.1.1}$$

unde Ω este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2 al lui $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, iar condiţia $u_{|\partial\Omega} = \infty$ înseamnă că:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega. \tag{6.1.2}$$

Studiul problemei (6.1.1) este atras de numeroasele aplicaţii practice. Spre exemplu, în cazul $p = 2$ şi $g(u) = u^2$, Pohozaev [116] a arătat că această problemă apare în studiul mişcarii unui gaz într-un spaţiu închis.

Pe de altă parte, în contextul ecuaţiilor cu derivate parţiale, analizând din nou articolele [81], [117] unde (6.1.1) este considerată pentru cazul particular $p = 2$, observăm că Keller şi Osserman au găsit condiţii necesare şi suficiente lui g ce au garantat existenţa a cel puţin unei soluţii ce verifică problema (6.1.1).

În cazul când $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera de clasă C^2 problema (6.1.1) este considerată în cazul general de Matero [104] în ipoteza că g este o funcţie continuă, pozitivă, crescătoare pe $\mathbb{R}_+$ iar

$$\Psi_p(t) := \int_t^\infty \left[\frac{p}{p-1} \int_0^s g(t)dt \right]^{-1/p} ds$$

este bine definită pentru $t > 0$. În aceste ipoteze el demonstrează că există cel puţin o soluţie $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ ce verifică (6.1.1). Mai mult, este aratat că există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $u \in C^{1,\alpha}(K)$ pentru orice mulţime compactă $K \subset \Omega$ şi

$$\lim_{x \to \partial\Omega} \frac{\Psi_p(u(x))}{dist(x, \partial\Omega)} = 1 \ uniform \ \hat{\imath}n \ \Omega.$$

Datorită tehnicii demonstraţiei, Matero nu a reuşit să demonstreze că aceste condiţii impuse lui g sunt şi suficiente în studiul existenţei soluţiilor.

Inspirat de tehnica demonstraţiei lui Bandle şi Marcus [9], Keller [81] şi Osserman [117] în cazul $p = 2$ şi Matero [104] pentru cazul general $p \in (1, \infty)$ vom stabili în acest capitol condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa a cel puţin unei soluţii a problemei (6.1.1).

Ne îndreptăm atenţia spre studiul existenţei soluţiilor $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. Mai mult, observăm că rezultatele de regularitate pentru operatorul p-Laplacian (vezi [41, 98, 132, 133] sau *Lema 1.2.7*) stabilesc că aceste soluţii verifică $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ cu $\alpha \in (0, 1)$.

În cazul $p = 2$, tehnici similare au fost folosite în lucrarea [43] sub condiţii mai generale asupra lui g.

Vom stabili câteva rezultate preliminare de care vom avea nevoie în demonstrarea teoremei principale.

6.2 Rezultate preliminare

Lema 6.2.1 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2. Dacă $g \in C^1([0, \infty), [0, \infty))$ satisface (G1) iar h este o constantă pozitivă atunci problema*

$$\Delta_p u = g(u) \ \hat{\imath}n \ \Omega, \ u_{|\partial\Omega} = h, \tag{6.2.1}$$

are o unică soluţie $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$. Mai mult, dacă Ω este o bilă B atunci u este soluţie cu simetrie radială.

Demonstraţie: În [47], folosind formularea variaţională, se demonstrează că există o funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ care minimizeză funcţionala Euler

$$J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx + \int_\Omega G(v)dx,$$

în mulţimea $C = \left\{ v \in L^1(\Omega) \,\middle|\, v - h \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ şi } (G \circ v) \in L^1(\Omega) \right\}$ şi că există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $u \in C^{1,\alpha}(K)$ pentru orice mulţime compactă $K \subset \Omega$ şi acest minim este unica soluţie a problemei (6.2.1). Mai mult, este arătat că $J(v)$ are un unic punct critic de minim şi acesta este cu simetrie radială în cazul în care mulţimea Ω este o bilă. Remarcăm că în referinţa [82] sunt obţinute rezultate mai generale în privinţa soluţiilor cu simetrie radială pentru astfel de probleme cvasiliniare. ■

Vom folosi în obţinerea rezultatului principal următoarea:

Lema 6.2.2 *(vezi [43, 104]) Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2 a lui $\mathbb{R}^N$ şi $B \subset \Omega$ o bilă. Presupunem că $g \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$ satisface (G1) şi că există o funcţie $v \in W^{1,p}_{loc}(B)$ cu simetrie radială astfel încât $\Delta_p v \le g(v)$ în B, $v_{|\partial B} = \infty$. În aceste ipoteze dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este soluţia problemei (6.2.1) atunci $u(x) \le v(|x|)$ pentru orice $x \in \overline{B}$.*

Pentru următoarea variantă a principiului comparaţiei se poate consulta [132], [133] sau referinţa [126].

Lema 6.2.3 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 2)$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă şi w_1, $w_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfăcând pentru orice $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ cu $\varphi \ge 0$ în Ω relaţia*

$$\int_\Omega |\nabla w_1|^{p-2} \nabla w_1 \nabla \varphi dx \le \int_\Omega |\nabla w_2|^{p-2} \nabla w_2 \nabla \varphi dx, \tag{6.2.2}$$

ceea ce înseamnă $-\Delta_p w_1 \le -\Delta_p w_2$ în Ω (în sens slab). Dacă

$$w_1 \le w_2 \quad pe \quad \partial\Omega, \tag{6.2.3}$$

atunci

$$w_1 \le w_2 \quad în \quad \Omega. \tag{6.2.4}$$

Următorul rezultat este cunoscut. În el sunt date condiţii echivalente lui (G2), condiţie cunoscută în literatura de specialitate drept condiţie de tip Keller-Osserman. Demonstraţia poate fi obţinută, spre exemplu, în acelaşi mod ca în lucrarea lui Aftalion şi Reichel [1] unde este tratat cazul $p = 2$.

Lema 6.2.4 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(KO) g *satisface condiţia de tip Keller-Osserman G2);*

(KO1) *există* $\beta > 0$ *astfel încât*

$$\mathcal{K}(\beta) := \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int\limits_{\beta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{G(t) - G(\beta)}} dt < \infty; \tag{6.2.5}$$

(KOL1)

$$\lim_{\beta \to \infty} \mathcal{K}(\beta) = 0 \ . \tag{6.2.6}$$

Vom demonstra următorul rezultat.

Lema 6.2.5 *Presupunem că sunt satisfăcute ipotezele Lemei 6.2.1 asupra lui* g*. Dacă* $\xi \in C^1(0, \rho)$ *este o funcţie ce verifică*

$$(\tau^{N-1} \left|\xi'(\tau)\right|^{p-2} \xi'(\tau))' = \tau^{N-1} g(\xi(\tau)) \text{ pentru orice } \tau \in (0, \rho), \tag{6.2.7}$$

atunci, pentru $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$*, avem*

$$\int_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(t) - G(\xi(\rho_1))]}} dt \geq \frac{p-1}{N-p} \rho_1 \left(1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{(N-p)/(p-1)}\right),$$

pentru $N \neq p$ *şi*

$$\int_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(t) - G(\xi(\rho_1))]}} dt \geq \rho_1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

pentru $N = p$.

Demonstraţie: Un calcul simplu arată că pentru $\tau \in (\rho_1, \rho_2)$ avem că $\xi'(\tau) > 0$, deci (6.2.7) este echivalent cu

$$(p-1)\xi'(\tau)^{p-2}\xi''(\tau) + \frac{N-1}{\tau}\xi'(\tau)^{p-1} = g(\xi(\tau)). \tag{6.2.8}$$

Multiplicând relaţia anterioară cu

$$\frac{p}{p-1}\xi'(\tau)\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)},$$

rezultă

$$(\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau)^p)' = \frac{p}{p-1}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau)g(\xi(\tau)). \tag{6.2.9}$$

Integrând această egalitate de la ρ_1 la τ obţinem

$$\begin{aligned}
\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\left(\xi'(\tau)\right)^p &\geq \tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}(\xi'(\tau))^p - \rho_1^{\frac{p}{p-1}(N-1)}(\xi'(\rho_1))^p \\
&= \int_{\rho_1}^{\tau} \frac{p}{p-1}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau)g(\xi(\tau))d\tau \\
&\geq \frac{p}{p-1}\rho_1^{\frac{p}{p-1}(N-1)}(G(\xi(\tau)) - G(\xi(\rho_1))).
\end{aligned}$$

Deci

$$\tau^{\frac{N-1}{p-1}}\xi^{'}(\tau) \geq \sqrt[p]{p/(p-1)}\rho_1^{\frac{N-1}{p-1}}\sqrt[p]{G(\xi(\tau)) - G(\xi(\rho_1))},$$

sau, echivalent

$$\frac{\sqrt[p]{p-1}\xi^{'}(\tau)}{\sqrt[p]{p[G(\xi(\tau)) - G(\xi(\rho_1))]}} \geq (\frac{\rho_1}{\tau})^{\frac{N-1}{p-1}}. \tag{6.2.10}$$

Integrând relaţia (6.2.10) între ρ_1 şi ρ_2, implică:

pentru $p \neq N$ relaţia

$$\int_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(t) - G(\xi(\rho_1))]}}dt \geq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{\frac{N-1}{p-1}} dt = \frac{p-1}{N-p}\rho_1 \left(1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right),$$

şi

$$\int_{\xi(\rho_1)}^{\xi(\rho_2)} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(t) - G(\xi(\rho_1))]}}d \geq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho_1}{t}dt = \rho_1 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1},$$

pentru $p = N$. ■

Lema 6.2.6 *Fie* $g \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$ *o funcţie satisfăcând (G1). Avem: g satisface condiţia de tip Keller-Osserman (G2) dacă şi numai dacă există o bilă* B_ρ *în care (6.1.1) admite cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie: Argumentăm prima implicaţie. Se cunoaşte din *Lema 6.2.1*, că

există o unică soluţie pozitivă cu simetrie radială u astfel încât $\Delta_p u = g(u)$ *în* B_1, $u = \beta$ *pe* ∂B_1. Alegând $\widetilde{\beta} = u(0)$, $\xi(\tau) := u(x)$ pentru $\tau = |x|$ şi rezolvând (6.2.7), sub condiţiile iniţiale $\xi(0) = \widetilde{\beta}$ şi $\xi^{'}(0) = 0$, rezultă din teoria clasică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare că pentru condiţia iniţială fixă $\xi(0)$ soluţia lui (6.2.7), $\xi(\tau)$ poate fi extinsă la un interval maximal $(0,\rho)$ (vezi spre exemplu [58], [117] sau [142]). Presupunem pentru început că $\rho < \infty$ şi că pentru $p \neq N$ avem $\mathcal{K}(\beta) < (p-1)/|N-p|$. Atunci u este o soluţie a problemei *(6.1.1)* în B_ρ. Într-adevăr, din definiţia lui ρ, avem $\xi(\rho) = +\infty$ sau $\xi'(\rho) = +\infty$. În cazul din urmă, din (6.2.7) obţinem că

$$\begin{aligned}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi^{'}(\tau)^p &= \int_0^\tau \frac{p}{p-1}t^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi^{'}(t)g(\xi(t))dt = \frac{p}{p-1}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}G(\xi(\tau)) \\ &\quad - \left(\frac{p}{p-1}\right)^2(N-1)\int_0^\tau t^{\frac{p}{p-1}(N-1)-1}G(\xi(t))dt\end{aligned}$$

şi deci $[(p-1)(\xi'(\tau))^p]/p \leq G(\xi(\tau))$. Atunci $G(\xi(\rho)) = +\infty$, $\xi(\rho) = +\infty$ şi concluzia că u este o soluţie a problemei considerate. Acum, arătăm că (G2) implică $\rho < \infty$. În caz contrar aplicând *Lema 6.2.5* între $\rho_1 = 1$ şi $\rho_2 > 1$, observăm că

$$\mathcal{K}(\beta) \geq \frac{p-1}{N-p}\left(1 - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right),$$

pentru $N \neq p$ şi

$$\mathcal{K}(\beta) \geq \ln \rho_2,$$

pentru $N = p$ şi datorită *Lemei 6.2.4* pentru ρ_2 tinde la ∞, obţinem o contradicţie dacă sau $N = p$ ori

$$\mathcal{K}(\beta) < \frac{p-1}{|N-p|}.$$

În cazul $N \neq p$ şi

$$\mathcal{K}(\beta) \geq \frac{p-1}{|N-p|},$$

putem alege $C > 0$ suficient de mare astfel încât

$$\frac{1}{C}\mathcal{K}(\beta) \leq \frac{p-1}{|N-p|}.$$

Remarcăm că dacă g este înlocuit cu $C^p g$, $\widetilde{u}(x) := u(x/c)$ este o soluţie a problemei (6.1.1) cu funcţia neliniară g în $B_{\rho C}$.

În concluzie: dacă condiţia de tip *Keller-Osserman* are loc atunci există bile în care $u = \infty$ *când* $x \to \rho$ cu ρ finit.

Invers, presupunem că există bile de rază ρ, al căror centru poate fi presupus în origine, în care u rezolvă (6.1.1).

Putem presupune că u este soluţie cu simetrie radială şi definim $\xi(\tau) = u(x)$ pentru $\tau = |x|$, astfel încât ξ să verifice (6.2.8) în $(0, \rho)$.

Ca în *Lema 6.2.5* obţinem că

$$(\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau))' = \frac{p}{p-1}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau)g(\xi(\tau)).$$

Integrând această ecuaţie de la 0 la τ rezultă

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p}\tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(\tau)^p &= \int_0^\tau z^{\frac{p}{p-1}(N-1)}\xi'(z)g(\xi(z))dz \\ &\leq \tau^{\frac{p}{p-1}(N-1)}[G(\xi(\tau)) - G(\xi(0))]. \end{aligned}$$

Integrând încă o dată de la 0 la ρ avem

$$0 \leq \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p}} \int_0^\rho \frac{\xi'(\tau)}{\sqrt[p]{G(\xi(\tau)) - G(\xi(0))}} d\tau \leq \rho \tag{6.2.11}$$

şi deci (6.2.5) are loc cu $\beta = \xi(0)$. ■

Avem nevoie de următorul rezultat:

Lema 6.2.7 *Presupunem că $g \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$ satisface (G1). Dacă (6.2.6) are loc şi B_ρ este o bilă de rază ρ atunci*

$$\inf\{\rho > 0 : (6.1.1) \textit{ are o soluţie în } B_\rho\} = 0. \tag{6.2.12}$$

Demonstraţie: Deoarece (6.2.6) este echivalentă cu (6.2.5) şi (G2), atunci din *Lema 6.2.6*, avem că există bile în care problema (6.1.1) are cel puţin o soluţie şi deci putem defini

$$\rho_0 := \inf\{\rho > 0 : (6.1.1) \textit{ are o soluţie în } B_\rho\}.$$

Presupunem contrariul că $\rho_0 > 0$ şi fie (σ_n) un şir de numere reale crescător la infinit astfel încât $\lim\limits_{\sigma_n\to\infty} \mathcal{K}(\sigma_n) = 0$.

În continuare vom considera unica soluţie cu simetrie radială u_n a problemei

$$\Delta_p u_n = g(u_n) \textit{ în } B_{\rho_0/2},\ u_n = \sigma_n \textit{ pe } \partial B_{\rho_0/2},$$

care există din *Lema 6.2.1*.

Alegând $\alpha_n = u_n(0)$, $\xi_n(\tau) := u_n(x)$ pentru $\tau = |x|$ şi rezolvând (6.2.7) sub condiţiile iniţiale $\xi_n(0) = \alpha_n$ şi $\xi_n^{'}(0) = 0$ putem vedea din definiţia lui ρ_0, că ξ_n poate fi extinsă astfel încât problema (6.2.7) are o soluţie în $(0, \rho_0)$ (vezi [142]).

Rămâne să aplicăm *Lema 6.2.5* cu $\rho_1 = \rho_0/2$ şi $\rho_2 = \rho_0$ pentru a observa că

$$\mathcal{K}(\sigma_n) \geq \frac{p-1}{N-p}\frac{\rho_0}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right),$$

pentru $N \neq p$ şi $\mathcal{K}(\sigma_n) \geq (\rho_0/2)\ln 2$ pentru $N = p$.

Trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem o contradicţie în ambele cazuri. Deci (6.2.12) are loc. ■

Încheiem secţiunea de rezultate preliminarii. Rezultatul ce urmează este acceptat pentru comunicare în [35].

6.3 Rezultatul principal

Rezultatul principal al acestui capitol este sintetizat în:

Teorema 6.3.1 *Fie $g \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$ o funcţie îndeplinind (G1). Avem: g satisface condiţia de tip Keller-Osserman (G2) dacă şi numai dacă problema (6.1.1) admite cel puţin o soluţie în orice domeniu Ω mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2.*

Demonstraţie: Presupunem că g satisface condiţia de tip Keller-Osserman G2). Fie $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ unica soluţie a problemei

$$\Delta_p u = g(u) \textit{ în } \Omega,\ u_{|\partial\Omega} = n,\ \textit{cu } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \tag{6.3.1}$$

determinată în *Lema 6.2.1*.

Arătăm că *Lema 6.2.3* implică $u_1 \leq u_2 \leq .... \leq u_n \leq ....$ în $\overline{\Omega}$.

Într-adevăr, presupunem prin reducere la absurd, că

$$\omega = \{x \in \Omega \,|u_n > u_{n+1}\} \neq \varnothing. \tag{6.3.2}$$

Folosind (6.3.2) şi faptul că u_n şi u_{n+1} sunt soluţii ale problemei (6.3.1) obţinem:

$$\Delta_p u_n - \Delta_p u_{n+1} = g(u_n) - g(u_{n+1}) \geq 0 \text{ în } \omega.$$

Această ultimă relaţie implică $-\Delta_p u_{n+1} \geq -\Delta_p u_n$ în ω. Pe de altă parte $(u_n - u_{n+1})_{|\partial\omega} = 0$ şi din *Lema 6.2.3* obţinem în final că $u_n \leq u_{n+1}$ în $\overline{\omega}$. Am obţinut o contradicţie cu presupunerea şi deci $\{u_n\}_{n\geq 1}$ este un şir crescător.

Cum (6.2.5) este îndeplinit, *Lema 6.2.6* arată că pentru $x \in \Omega$ există o bilă $B(x,\tau) \subset \Omega$ astfel încât *(6.1.1)* are cel puţin o soluţie. Prin construcţie soluţia este cu simetrie radială. Notăm prin u_τ soluţia obţinută pentru $\Omega := B(x,\tau)$ în *(6.1.1)*. Rezultă din *Lema 6.2.2* că $0 \leq u_n \leq u_\tau$ în $B(x,\tau)$.

Deoarece u_τ este local mărginită în $B(x,\tau)$ obţinem

$$\textit{există } C > 0 \textit{ astfel încât } u_n \leq C \quad \textit{în} \quad B(x,\tau/2) \textit{ pentru orice } n = 1,2,3,....$$

Tot din *Lema 6.2.1* cunoaştem că $u_n \in C^{1,\alpha}(\Lambda)$ $\alpha \in (0,1)$ pentru orice submulţime compactă Λ a lui Ω. Din fapul că Λ este o mulţime compactă deducem că există un număr finit de bile $B(x,\tau_i/2)$ deschise ce acoperă Λ şi deci putem concluziona că $\{u_n\}_{n\geq 1}$ este uniform mărginit pe Λ.

Folosind aceste proprietăţi ale şirului $\{u_n\}_{n\geq 1}$ cu regularitate de clasă $C^{1,\alpha}$ $\alpha \in (0,1)$, deducem că $\{u_n \,|n \geq 1\}$ şi $\{\nabla u_n \,|n \geq 1\}$ sunt echicontinue în domenii compacte conţinute în Ω. În concluzie în acelaşi mod ca în *Capitolul 1* putem extrage un subşir, pe care îl notăm tot prin $\{u_n\}_{n\geq 1}$, astfel încât $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ şi $\nabla u_n \overset{n\to\infty}{\to} \nabla u$ uniform în submulţimi compacte ale lui Ω la $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ şi respectiv $\nabla u \in (C^{0,\alpha}(\Omega))^N$. Până în prezent cunoaştem că $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Arătăm că u este o soluţie a problemei *(6.1.1)*. Vom proceda ca în *Capitolul 1*.

Pentru aceasta fie Ω' un domeniu al lui $\mathbb{R}^N$ astfel încât $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ cu $\overline{\Omega'}$ mulţime compactă şi $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ cu $\varphi \geq 0$ în Ω şi *supp* $\varphi \subseteq \Omega'$. Din rezultatele de regularitate obţinute în [41, 98, 132], vom vedea că

$$|\nabla u_n|^{p-1} |\nabla\varphi| \leq C\,|\nabla\varphi| \;\; \textit{în } \Omega'$$

şi deoarece funcţia $t \to |t|^{p-2}\, t$ este continuă pe $\mathbb{R}^N$, rezultă că

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\, \nabla u_n(x) \cdot \nabla\varphi(x) \to |\nabla u(x)|^{p-2}\, \nabla u(x) \cdot \nabla\varphi(x) \ \textit{pentru}\ x \in \Omega'.$$

Atunci din Teorema convergenţei dominate obţinem

$$\int_{\Omega'} |\nabla u_n\,(x)|^{p-2}\, \nabla u_n\,(x) \cdot \nabla\varphi dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_{\Omega'} |\nabla u\,(x)|^{p-2}\, \nabla u\,(x) \cdot \nabla\varphi\,(x)\, dx. \tag{6.3.3}$$

Mai mult, deoarece $g \in C^1$ şi $u_n \to u$ obţinem că $g(u_n) \overset{n\to\infty}{\to} g(u)$ pentru orice $x \in \Omega'$. Pe de altă parte folosind teorema convergenţei monotone putem observa că

$$\int_{\Omega'} g(u_n\,(x))\varphi\,(x)\, dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_{\Omega'} g(u\,(x))\varphi\,(x)\, dx. \tag{6.3.4}$$

Acum din (6.3.3) şi (6.3.4) rezultă că

$$\int_{\Omega'} |\nabla u\,(x)|^{p-2}\, \nabla u\,(x) \cdot \nabla\varphi\,(x)\, dx = -\int_{\Omega'} g(u\,(x))\varphi\,(x)\, dx. \tag{6.3.5}$$

Relaţia din urmă ne spune că $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ satisface

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla\varphi dx = -\int_{\Omega} g(u)\varphi dx,$$

pentru orice $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Pasul următor, este să observăm că $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} u(x) = \infty$. Într-adevăr, fixăm un punct $x_0 \in \partial\Omega$ şi un şir arbitrar $\{x_k\}$ în Ω convergent la x_0. Atunci, deoarece $u_{n+1} = n + 1$ pe $\partial\Omega$, şi este continuă, există câteva constante $M > 0$ astfel încât $u_{n+1}(x_k) \geq n$ pentru $k \geq M$. Notăm că, deoarece $u \geq u_{n+1}$ în Ω, avem

$$\lim_{k\to\infty} \inf u(x_k) \geq \lim_{k\to\infty} \inf u_n(x_k) = n, k \geq M.$$

Făcând n să conveargă la infinit, deducem că u este o soluţie a problemei (6.1.1) în Ω.

Invers, pentru $n \in \mathbb{N}$, presupunem că $u_n > 0$ este o soluţie a lui (6.1.1) într-o bilă B de rază ε_n al cărui centru poate fi ales în origine, unde ε_n este un şir descrescător astfel încât $\varepsilon_n \searrow 0$ când $n \to \infty$. Putem de altfel presupune că u_n este soluţie cu simetrie radială. Fie acum $\beta_n = u_n(0)$. Observăm că putem presupune $\lim\limits_n \beta_n = \infty$, eventual trecând la un subşir. Atunci (6.2.6) rezultă din (6.2.11) aplicat cu $\rho = \varepsilon_n$.

Rămâne să demonstrăm că (β_n) este nemărginit. Dacă nu, trecând la un subşir, (β_n) converge la $\beta \in [0, \infty)$. Din (6.2.11) aplicat cu $\rho = \varepsilon_n$, obţinem

$$0 \leq \int_{\beta_n}^{\infty} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(z) - G(\beta_n))]}} dz \leq \varepsilon_n. \tag{6.3.6}$$

Făcând $n \to \infty$ în (6.3.6) rezultă că

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{\sqrt[p]{p-1}}{\sqrt[p]{p[G(z) - G(\beta))]}} dz = 0$$

ceea ce nu este posibil. ∎

6.4 Comentarii

În cazul $p = 2$ este demonstrat în [43] folosind un argument al principiului comparaţiei şi metoda sub şi super-soluţiei că ipoteza g funcţie monotonă nu este necesară ci doar suficientă. Este firesc să ne întrebăm dacă rămân adevărate rezultatele din *Teorema 4.3.1* când g nu este monotonă. Dacă $p \neq 2$, vom menţiona că, este posibil ca demonstraţia din [43] să se aplice cazului când g este funcţie local Lipschitz continuă fără a avea nevoie de condiţia de monotonicitate. Considerăm că, pentru a demonstra aceasta este necesar să folosim referinţele: [39], [40], [43], [58] şi câteva rezultate de regularitate care pot fi găsite şi cum trebuie folosite în [29]. Rezultate în această direcţie pot fi consultate şi în [44]. Noi nu am reuşit să dăm, până în prezent, un răspuns complet al acestor probleme.

Aşa cum vom vedea în *Capitolul 7* problema (6.1.1) este cheia în studiul problemei mai generale

$$\Delta_p u = a\,(x)\, g(u) \ \textit{în}\ \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = \infty,$$

fapt ce a impus studiul problemei respective.

Capitolul 7

Rezultate de existenţă a soluţiei pentru o problemă cvasiliniară de tip Bieberbach şi Rademacher în $\mathbb{R}^N$

7.1 Introducere

În acest capitol, vom stabili existenţa a cel puţin unei soluţii pentru problema eliptică cvasiliniară

$$\begin{cases} \Delta_p u = b(x)f(u) \text{ în } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \ u > 0 \text{ în } \Omega, \\ u(x) \to \infty \ \text{ când } \ x \to \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

unde $N > 2$, $1 < p < N$ iar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2 sau $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Presupunem că $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele ipoteze, nu neapărat simultan:

(b1) b este pozitivă, netrivială în Ω şi cu următoarea proprietate: pentru orice $x_0 \in \Omega$ satisfăcând $b(x_0) = 0$, există un domeniu Ω_0 astfel încât $x_0 \in \Omega_0$, $\overline{\Omega}_0 \Subset \Omega$ şi $b(x) > 0$ pentru orice $x \in \partial\Omega_0$;

(b2) $b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;

(b3) pentru $b \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ şi $\Phi(r) = \max_{|x|=r} b(x)$

$$\int_0^\infty r^{1/(p-1)}\Phi^{1/(p-1)}(r)dr \ < \ \infty \quad \text{pentru} \ \ p \in (1,2]\,,$$

$$\int_0^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}}\Phi(r)dr \ < \ \infty \quad \text{pentru} \ \ p \in [2,N)$$

şi că funcţia neliniară $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ îndeplineşte

(f1) $f \in C^1([0,\infty),[0,\infty))$, $f'(s) \geq 0$;

(f2) $\int_\alpha^{+\infty} \left[p \cdot (p-1)^{-1} \cdot F(s)\right]^{-1/p} ds < +\infty \ \forall\alpha > 0$ unde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Problema (7.1.1) a fost considerată de mai mulţi autori în cazul $p = 2$ şi în cazul în care domeniul Ω este mărginit. Primul exemplu de problemă similară lui (7.1.1) a fost studiată de Bieberbach [12] în 1916 şi corespunde cazului $f(u) = e^u$, $b(x) = 1$ iar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu mărginit şi suficient de neted. În acest caz problema joacă un rol important în teoria suprafeţelor Riemanniene de curbură constantă negativă şi în teoria funcţiilor automorfe. Când $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ această problemă apare în studiul potenţialului electrostatic într-un corp metalic strălucitor pe interior (vezi Keller [80]). Rademacher [124], în 1943, a extins rezultatele lui Bieberbach sub ipoteza că Ω este un domeniu al lui $\mathbb{R}^3$ cu frontiera $\partial\Omega$ o subvarietate de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$.

După aceste rezultate, problema existenţei soluţiilor a fost intens studiată de mai mulţi autori pentru clase mai generale de funcţii. Condiţia *(f2)* a fost pentru prima dată introdusă în 1957 de Keller [81] şi Osserman [117]. Loewner şi Nirenberg în [102] au studiat problema unicităţii şi comportamentul asimptotic al soluţiilor în cazul

$$b(x) = const > 0 \ \text{şi} \ f(u) = u^{(N+2)/(N-2)}, N > 2$$

iar Ω este un domeniu arbitrar din $\mathbb{R}^N$. Ei au arătat că această problemă este motivată de o problemă concretă ce apare în Geometria Riemaniană.

În contextul ecuaţiilor cu derivate parţiale problema (7.1.1) a fost în atenţia mai multor cercetători. În cazul $p = 2$, Lazer şi McKenna [96] au demonstrat existenţa unei soluţii clasice pentru problema (7.1.1) în cazul în care Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ce satisface condiţia sferei exterioare, $f(u) = e^u$ iar $b \in C(\Omega)$ cu $b(x) > 0$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$.

Cheng şi Ni [25] a considerat problema (7.1.1) în cazul $p = 2$, $f(u) = u^\gamma$ $(\gamma > 1)$ iar Ω domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ suficient de neted. Ei au obţinut existenţa unei soluţii presupunând în plus că funcţia suficient de netedă b este aleasă astfel încât $b \geq 0$ pe $\partial\Omega$.

Rezultatul lor a fost extins de Marcus [110] la funcţii mai generale f ce satisfac condiţii de tip Keller-Osserman dar în aceleaşi ipoteze asupra funcţiei b.

Mai recent, Lair [87] în cazul $p = 2$, a demonstrat că dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit cu frontiera de clasă C^2, funcţia f este continuă şi crescătoare pe $[0, \infty)$ cu $f(0) = 0$ şi $f(s) > 0$ pentru $s > 0$ iar b este continuă pe $\overline{\Omega}$, cu proprietatea (b1) atunci problema (7.1.1) corespunzătoare cazului $p = 2$ are cel puţin o soluţie dacă în plus f satisface condiţia de tip Keller-Osserman

$$\int_1^\infty \left[\int_0^s f(t)dt\right]^{-1/2} ds < \infty.$$

El, în plus, a arătat că dacă $\Omega = \mathbb{R}^N$ iar $b \in C(\mathbb{R}^N)$ satisface şi

$$\int_0^\infty r\phi(r)dr < \infty \ \textit{unde} \ \phi(r) = \max_{|x|=t} b(x)$$

atunci există cel puţin o soluţie a problemei (7.1.1).

Zhang [131] extinde rezultatele de existenţă ale predecesorilor îmbunătăţind condiţiile asupra lui b şi f dar tot în cazul $p = 2$.

În [111] Mohammed studiază direct problema (7.1.1). El presupune pentru început că funcţia $b \in C(\Omega)$ satisface condiţia G dacă există un subşir de domenii $\{\Omega_k\}$ astfel încât

$$\Omega = \cup_{k=1}^{\infty}\Omega_k, \overline{\Omega}_k \subseteq \Omega_{k+1}, k = 1, 2, ...$$

iar pentru orice $x_0 \in \Omega$ satisfăcând $b(x_0) = 0$, există un sub-domeniu $O \Subset \Omega$ conţinând x_0 astfel încât $b(x) > 0$ pentru orice $x \in \partial O$. Sub ipotezele $f \in C^1([0, \infty), [0, \infty))$ funcţie crescătoare ce satisface $f(0) = 0$, $f(s) > 0$ pentru orice $s > 0$ şi astfel încât

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{[F(t)]^{1/p}} dt < \infty \ \textit{unde} \ F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

iar $b \in C(\Omega)$ este o funcţie ce satisface condiţia G el arată că dacă problema

$$\begin{aligned} \Delta_p w &= -b(x) \ \textit{în} \ \Omega, \\ w &= 0 \ \textit{pe} \ \partial\Omega, \end{aligned}$$

are o soluţie atunci există o soluţie şi pentru problema (7.1.1). În plus autorul stabileşte şi comportamentul asimptotic al soluţiei, însă el nu tratează cazul $\Omega = \mathbb{R}^N$ şi $f(0) > 0$ tratat în acest capitol.

Vom folosi aceeaşi tehnică ca în [87, 131, 141] pentru a demonstra existenţa soluţiilor lui (7.1.1).

Definiţia 7.1.1 *O funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se numeşte soluţie slabă a problemei (7.1.1) în domeniul Ω dacă pentru orice $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ cu $\varphi \geq 0$ în Ω avem*

$$-\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega b(x)f(u)\varphi dx. \tag{7.1.2}$$

Definiţia 7.1.2 *O funcţie $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ se numeşte soluţie local slabă a problemei (7.1.1) în domeniul Ω dacă u este o soluţie slabă a problemei (7.1.1) pentru orice sub-domeniu $\Omega_1 \subset \Omega$.*

Definiţia 7.1.3 *Orice soluţie local slabă u a lui (7.1.1) care este continuă în Ω şi*

$$u(x) \to \infty \quad \textit{când} \quad x \to \partial\Omega, \tag{7.1.3}$$

se numeşte soluţie explozivă.

Analog, pentru $\Omega = R^N$ condiţia (7.1.3) se scrie

$$u(x) \to \infty \ \textit{când} \quad |x| \to \infty,$$

şi în acest caz spunem că soluţia se numeşte explozivă totală.

Vom stabili câteva rezultate preliminare ce vor fi necesare în demonstrarea teoremelor.

7.2 Rezultate preliminare

Reamintim că o mulţime Ω satisface condiţia sferei uniform exterioare dacă există un număr $r > 0$ astfel încât pentru orice $z \in \partial\Omega$ există o bilă închisă $\overline{B}$ de rază r cu $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{z\}$. Notăm că un domeniu Ω mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2 satisface aceste condiţii.

Suntem în măsură să dăm rezultatele preliminare. Următoarea lemă poate fi găsită în [96], [131] (vezi şi Lema 1.2.8).

Lema 7.2.1 *Dacă Ω este o mulţime deschisă şi mărginită a lui $\mathbb{R}^N$ ce satisface condiţia sferei uniform exterioare atunci există un şir $\{\Omega_m\}_1^\infty$ de submulţimi deschise astfel încât*

$$\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega, \cup_{m=1}^{\infty}\Omega_m = \Omega,$$

iar frontiera $\partial\Omega_m$ este o $(C^\infty)-$subvarietate netedă de dimensiune $N-1$ pentru $m \geq 1$.

Lema 7.2.2 *(vezi Teorema 1.3.1) Dacă b satisface (b1), (b2) şi Ω este un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ suficient de netedă atunci problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = b(x)[u(x)+\varepsilon]^{-1} \ \textit{pentru} \ x \in \Omega, \\ u > 0 \ \textit{în} \ \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{7.2.1}$$

are o unică soluţie $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ cu $\alpha \in (0,1)$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Lema 7.2.3 *În ipotezele (b1) şi (b3) problema*

$$\begin{cases} -(r^{N-1}\,|w'(r)|^{p-2}\,w'(r))' = r^{N-1}\Phi(r) \ (r = |\, x\,|) \ \textit{în} \ \ \mathbb{R}^N, \\ \lim_{r\to\infty} w(r) = 0, \\ w'(0) = 0, \end{cases} \tag{7.2.2}$$

are o unică soluţie pozitivă, mărginită şi cu simetrie radială.

Demonstraţie: Integrând (7.2.2) obţinem

$$w(r) := \int_r^\infty \left[\xi^{1-N}\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi,$$

cu $\lim_{r\to\infty} w(r) = 0$.

Demonstrăm că $w(r)$ este mărginită. Pentru aceasta considerăm două cazuri:

Cazul 1. $\underline{1 < p \le 2}$.

Deoarece în acest caz

$$1 \le \frac{1}{p-1} < \infty,$$

din inegalitatea lui Hölder avem că

$$\begin{aligned} w(r) &= \int_r^\infty \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\xi^{\frac{1}{p-1}}\left[\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right]^{1/(p-1)} d\xi \\ &\le \int_r^\infty \xi^{\frac{2-N}{p-1}}\frac{1}{\xi}\left[\int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)d\sigma\right]d\xi. \end{aligned}$$

Integrând prin părţi şi folosind regula lui L' Hôpital, avem

$$\begin{aligned} &\int_r^\infty \xi^{\frac{2-N}{p-1}}\tfrac{1}{\xi}\left[\int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)d\sigma\right]d\xi \\ &= -\tfrac{p-1}{N-2}\int_r^\infty \tfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{\frac{2-N}{p-1}}\right)[\int_0^\xi \sigma^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)d\sigma]d\xi \\ &= \tfrac{p-1}{N-2}\lim_{R\to\infty}\left\{\int_r^R [\xi\Phi(\xi)]^{\frac{1}{p-1}}d\xi - R^{\frac{2-N}{p-1}}\int_0^R \sigma^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)d\sigma + r^{\frac{2-N}{p-1}}\int_0^r \sigma^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\sigma)d\sigma\right\} \\ &= \tfrac{p-1}{N-2}\lim_{R\to\infty}\frac{R^{\frac{N-2}{p-1}}[\int_r^R \xi^{\frac{1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi + r^{\frac{2-N}{p-1}}\int_0^r \xi^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi] - \int_0^R \xi^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi}{R^{\frac{N-2}{p-1}}} \\ &= \tfrac{p-1}{N-2}\left[\int_r^\infty \xi^{\frac{1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi + r^{\frac{2-N}{p-1}}\int_0^r \xi^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi\right],\ R > r. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Acum, din a doua formulă de medie pentru integrale, există $r_1 \in (0, r)$ astfel încât

$$\begin{aligned} \int_0^r \xi^{\frac{N-1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi &= \int_0^r \xi^{\frac{N-2}{p-1}}\xi^{\frac{1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi \\ &= r^{\frac{N-2}{p-1}}\int_{r_1}^r \xi^{\frac{1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi \\ &\le r^{\frac{N-2}{p-1}}\int_0^r \xi^{\frac{1}{p-1}}\Phi^{\frac{1}{p-1}}(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

deoarece $N > 2$. Din (7.2.3)-(7.2.4) rezultă în final

$$w(r) \le \frac{p-1}{N-2}\int_0^\infty \xi^{1/(p-1)}\Phi^{1/(p-1)}(\xi)d\xi.$$

Cazul 2. $\underline{2 \le p < N}$.

În acest caz $0 < \frac{1}{p-1} \leq 1$.

Dacă

$$\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma < 1 \ pentru\ \xi > 0,$$

atunci

$$\int_r^R \left[\xi^{1-N}\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right]^{\frac{1}{p-1}} d\xi < \int_r^R \xi^{\frac{1-N}{p-1}}d\xi = \frac{p-1}{p-N}\left(R^{\frac{p-N}{p-1}} - r^{\frac{p-N}{p-1}}\right). \tag{7.2.5}$$

Folosind (7.2.5), avem

$$w(r) \leq \frac{p-1}{p-N}\lim_{R\to\infty}\left(R^{\frac{p-N}{p-1}} - r^{\frac{p-N}{p-1}}\right) = \frac{p-1}{N-p}r^{\frac{p-N}{p-1}},$$

deoarece $p < N$.

Dacă există $\xi_0 > 0$ astfel încât $\int_0^{\xi_0} \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma = 1$ atunci

$$\left(\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma \ pentru\ orice\ \xi \geq \xi_0$$

relaţie care implică

$$\int_r^R \xi^{\frac{1-N}{p-1}}(\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma)^{\frac{1}{p-1}}d\xi \leq \int_r^R \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma d\xi. \tag{7.2.6}$$

Mai mult, integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_r^R \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma d\xi\\
&= -\tfrac{p-1}{N-p}\int_r^\infty \tfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{\frac{2-N}{p-1}}\right)\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma d\xi\\
&= \tfrac{p-1}{N-p}\left[\int_r^R \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi - R^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^R \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma + r^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^r \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right]\\
&= \tfrac{p-1}{N-p}\frac{R^{\frac{N-p}{p-1}}[\int_r^R \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi + r^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^r \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma] - \int_0^R \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma}{R^{\frac{N-p}{p-1}}}.
\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Din (7.2.6)-(7.2.7) rezultă, folosind regula lui L' Hôpital

$$\begin{aligned}
w(r) &= \int_r^\infty \xi^{\frac{1-N}{p-1}}\left[\int_0^\xi \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right]^{\frac{1}{p-1}}d\xi\\
&\leq \tfrac{p-1}{N-p}\lim_{R\to\infty}\frac{R^{\frac{N-p}{p-1}}\left[\int_r^R \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi + r^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^r \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right] - \int_0^R \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma}{R^{\frac{N-p}{p-1}}}\\
&= \tfrac{p-1}{N-p}\lim_{R\to\infty}\left[\int_r^R \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi + r^{\frac{p-N}{p-1}}\int_0^r \sigma^{N-1}\Phi(\sigma)d\sigma\right].
\end{aligned}$$

Din nou, folosind a doua formulă de medie pentru integrale, există $r_2 \in (0, r)$ astfel încât

$$\begin{aligned}\int_0^r \xi^{N-1}\Phi(\xi)d\xi &= \int_0^r \xi^{\frac{N-p}{p-1}}\xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi = r^{\frac{N-p}{p-1}}\int_{r_2}^r \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi \\ &\leq r^{\frac{N-p}{p-1}}\int_0^r \xi^{\frac{N(p-2)+1}{p-1}}\Phi(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

şi demonstraţia este completă. ■

Autorul ţine să precizeze că utilizarea formulei de medie în demonstraţia *Lemei 7.2.3* a fost sugerată de către Michail Borsuk.

Lema 7.2.4 *Dacă f satisface (f1) şi (f2) atunci*

$$\frac{f(t)}{F(t)^{\frac{p-1}{p}}} \to \infty \quad \textit{când} \quad t \to \infty. \tag{7.2.8}$$

Mai mult, există $\gamma > 0$ astfel încât

$$\int_\gamma^\infty \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} < \infty. \tag{7.2.9}$$

Demonstraţie: Remarcăm că

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{t^p} = +\infty,$$

deoarece condiţia *(f2)* implică

$$\left(t - \frac{t}{2}\right)\frac{1}{\sqrt[p]{F(t)}} \leq \int_{t/2}^t \frac{ds}{\sqrt[p]{F(s)}} \to 0,$$

când $t \to +\infty$.

Pe de altă parte, din *(f1)* avem

$$\frac{f(t)}{t^{p-1}} \geq \frac{F(t)}{t^p}, \tag{7.2.10}$$

fapt ce atrage

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = \infty.$$

Folosind din nou (7.2.10), avem

$$\frac{f(t)}{F(t)^{\frac{p-1}{p}}} \geq \left(\frac{f(t)}{t^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \to +\infty,$$

când $t \to +\infty$.

Demonstraţia lui (7.2.8) este completă.

Acum, din (7.2.8) există $t_1 > 0$, astfel încât

$$f(t) \geq F(t)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{7.2.11}$$

pentru orice $t \geq t_1$. Dar relaţia (7.2.11) este echivalentă cu

$$\frac{1}{f^{1/(p-1)}(s)} \leq \frac{1}{\sqrt[p]{F(s)}}. \tag{7.2.12}$$

Integrând (7.2.12) de la t_1 la $+\infty$ avem

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{f^{1/(p-1)}(t)} dt \leq \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{F(t)}} dt < \infty.$$

Demonstraţia lui (7.2.9) este completă pentru $\gamma := t_1$. ■

Observăm că funcţia $R : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin

$$R(t) = \int_t^{+\infty} \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)},$$

este strict descrescătoare.

Remarcăm că, datorită *Lemei 7.2.4* putem defini

$$R(u) = \int_{u(x)}^{+\infty} \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} \text{ şi } w(x) = R(u(x)).$$

Atunci (7.1.1) este echivalentă cu următoarea problemă Dirichlet singulară

$$\begin{cases} -\Delta_p w + g(w) \left|\nabla w\right|^p = b(x) & \text{în } \Omega, \\ w > 0 & \text{în } \Omega, \\ w(x) \to 0 & \text{când } x \to \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2.13}$$

unde

$$g(w) = \frac{f'(u)}{f^{(p-2)/(p-1)}(u)} = \frac{f'(R^{-1}(w))}{f^{(p-2)/(p-1)}(R^{-1}(w))},$$

şi R^{-1} reprezintă inversa funcţiei R, care şi ea este strict descrescătoare în $(0, \infty)$.

În particular, pentru $f(u) = e^u$, avem $w = (p-1)e^{-u/(p-1)}$ şi

$$\begin{cases} -\Delta_p w + (p-1)\frac{|\nabla w|^p}{w} = b(x) & \text{în } \Omega, \\ w > 0 & \text{în } \Omega, \\ w(x) \to 0 & \text{când } x \to \partial\Omega, \end{cases}$$

pentru $f(u) = u^\gamma$ şi $\gamma > p-1$, avem $w = C(u)^{-C^{-1}}$ şi

$$\begin{cases} -\Delta_p w + \gamma C\frac{|\nabla w|^p}{w} = b(x) & \text{în } \Omega, \\ w > 0 & \text{în } \Omega, \\ w(x) \to 0 & \text{când } x \to \partial\Omega, \end{cases}$$

$C := (p-1)/(\gamma - p + 1)$.

Cu aceste observaţii vom demonstra:

Lema 7.2.5 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2. Dacă (f1), (f2), (b1), (b2) sunt îndeplinite atunci orice soluţie u a lui (7.1.1) satisface*

$$R^{-1}(\overline{v}(x)) \leq u(x),\ \forall x \in \Omega,$$

unde $\overline{v}(x)$ este unica soluţie a problemei (7.3.1). În particular, pentru $f(u\,(x)) = e^{u(x)}$,

$$(p-1)\ln[(p-1)/\overline{v}(x)] \leq u(x) \text{ pentru orice } x \in \Omega,$$

iar pentru $f(u\,(x)) = u^{\gamma}\,(x)$ şi $\gamma > p-1$,

$$[C/\overline{v}(x)]^C \leq u(x) \text{ pentru orice } x \in \Omega.$$

Demonstraţie: Vom considera problema (7.2.13). Fie w o soluţie arbitrară a lui (7.2.13). Demonstrăm că

$$w(x) = \int_{u(x)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} \leq \overline{v}(x) \text{ pentru } x \in \overline{\Omega}.$$

Presupunem, prin absurd, că

$$\omega = \{x \in \Omega\,|w(x) > \overline{v}(x)\} \neq \varnothing.$$

Clar ω este mulţime deschisă. Putem presupune că ω este mulţime conexă, în caz contrar putem considera o submulţime conexă a lui ω. Deoarece $g(w) \geq 0$, avem

$$-\Delta_p w + \Delta_p \overline{v} = -g(w)\,|\nabla w|^p \leq 0 \text{ în } \omega.$$

Pe de altă parte

$$(w - \overline{v})_{|\,\partial\omega} = 0.$$

Aplicând *Lema 6.2.3* obţinem că

$$w(x) \leq \overline{v}(x) \text{ pentru orice } x \in \overline{\omega}.$$

Această contradicţie demonstrează lema. ■

Un prim rezultat pentru problema (7.1.1) este:

Lema 7.2.6 *În ipotezele (f1), (f2), (b1), (b2) iar Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ o $(C^{\infty})-$subvarietate netedă de dimensiune $N-1$, problema (7.1.1) are cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie: Pentru fiecare $m \in N$, considerăm problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = b(x)f(u) & x \in \Omega, \\ u(x) = m, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2.15}$$

Deoarece $b \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ şi *b1)* este satisfăcut, vedem că $\overline{u}_m = m$ este o super-soluţie a lui (7.2.15). Pentru a construi o sub-soluţie $\underline{u}_m$ a lui (7.2.15), fie

$$\int_{\underline{u}_1(x)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} = \underline{w}_1(x),$$

unde $\underline{w}_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ este unica soluţie a lui

$$\begin{cases} -\Delta_p v = b(x) & \text{în } \ \Omega, \\ v(x) > 0 & \text{în } \ \Omega, \\ v = \displaystyle\int_1^\infty \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} > 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

(care există din acelaşi argument ca în *Teorema 7.3.1*). Atunci vom vedea că

$$\underline{u}_{1|\partial\Omega} = 1 \le m$$

şi

$$\underline{u}_1 = R^{-1}(\underline{w}_1)$$

satisface

$$-\Delta_p \underline{w}_1 = \frac{\Delta_p \underline{u}_1}{f(\underline{u}_1)} - \frac{f'(\underline{u}_1)}{f^2(\underline{u}_1)} |\nabla \underline{u}_1|^p = b(x) \ \text{în } \Omega,$$

din care se obţine

$$\Delta_p \underline{u}_1(x) \ge b(x) f(\underline{u}_1(x)) \ \text{pentru orice } x \in \Omega.$$

Deci $\underline{u}_1$ este o sub-soluţie a lui (7.2.15). Din *Lema 6.2.3* avem $\underline{u}_1 \le m$. Din metoda sub şi super-soluţiilor rezultă că (7.2.15) are o soluţie $u_m \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfăcând

$$\underline{u}_1 \le u_m \le m \ \text{în } \overline{\Omega}.$$

Mai mult, din lemele de deasupra, este clar că

$$0 \le R^{-1}(\underline{w}_1) = u_1 \le u_2 \le ... \le u_m \le u_{m+1} \le ... \le \quad \text{în } \ \Omega. \tag{7.2.16}$$

Atunci şirul $\{u_m\}$ este crescător.

Pentru a încheia demonstraţia lemei, este suficient să arătăm că pentru orice x_0 un punct arbitrar din Ω există o mulţime deschisă $O \subset\subset \Omega$ conţinând x_0 şi o constantă pozitivă, C_O, astfel încât $u_m(x) \le C_O$ în O pentru orice $m \ge 1$.

Existenţa unei mulţimi O şi a unei margini C_O, este probată considerând două cazuri:

Cazul 1) $b(x_0) > 0$.

În acest caz, cum $b \in C(\overline{\Omega})$, deducem că există o bilă $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ centrată în x_0 şi de rază r astfel încât

$$b(x) > 0, \forall x \in \overline{B(x_0, r)}.$$

Fie

$$b_0 := \min_{x \in \overline{B(x_0,r)}} b(x),$$

şi z o soluţie pozitivă a problemei

$$\begin{cases} \Delta_p z(x) = b_0 f(z(x)) \ \textit{pentru} \ \ x \in B(x_0, r), \\ z(x)_{|\partial B(x_0,r)} = \infty, \end{cases}$$

care există datorită rezultatelor datorate lui Matero (vezi *Capitolul 6)*.

Folosind acum principiul slab al comparaţiei, *Lema* 6.2.3, deducem că

$$u_m \leq z, \forall x \in B(x_0, r).$$

Pe de altă parte, deoarece z este local mărginită putem alege

$$O = B(x_0, R/2) \ \textit{iar} \ C_O = \max_O z.$$

Cazul 2) $b(x_0) = 0$.

Ipoteza b1) şi faptul că Ω este mărginită implică existenţa unei mulţimi O astfel încât

$$x_0 \in O \subset\subset \Omega \ \textit{şi} \ b(x) > 0 \ \textit{pe} \ \partial O.$$

Aplicând Cazul 1 anterior, cunoaştem că $\forall x \in \partial O$ există o bilă

$$B(x, r_x) \subset\subset \Omega,$$

ce nu depinde de m, şi o constantă pozitivă C_x astfel încât

$$u_m(x) \leq C_x \ \textit{în} \ B(x, r_x/2).$$

Din nou, faptul că domeniul Ω este mărginit implică că şi O este mărginit, fapt ce demonstrează că ∂O este compactă. Atunci, există un număr finit de bile ce acoperă ∂O, rezultat scris astfel

$$\partial O \subset \cup_{j=1}^{m_0} B(x_j, r_{x_j}/2).$$

Punem

$$C_O := \max\{C_{x_1}, C_{x_2}, ..., C_{x_{m_0}}\}$$

unde bilele

$$\overline{B(x_j, r_{x_j}/2)}, j = 1, 2, ..., m_0 \text{ } \textit{acoperă} \text{ } \partial O.$$

Clar, avem

$$u_m(x) \leq C_O \quad \textit{în} \quad \partial O.$$

Aplicând principiul slab al comparaţiei în O obţinem $u_m \leq C_O$ în O pentru orice $m = 1, 2, ...$

Deci, în ambele cazuri găsim că: dat $x_0 \in O$ există o bilă $B \subset O$ ce conţine x_0 şi o constantă pozitivă C_O astfel ca $u_m \leq C_O$ în O pentru orice $m = 1, 2, ...$ Acoperind O cu astfel de bile vom vedea că $\{u_m\}$ este uniform mărginit.

În pasul următor, observăm că

$$\lim_{x \to \partial\Omega} u(x) = \infty,$$

unde

$$u(x) = \lim_{m \to \infty} u_m(x) \text{ } \textit{pentru} \text{ } x \in \Omega.$$

Într-adevăr, fixăm un punct $x \in \partial\Omega$ şi un şir arbitrar (x_k) în Ω convergent la x. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, ţinând cont că

$$u_{\varepsilon+1} = \varepsilon + 1 \text{ } \textit{pe} \text{ } \partial\Omega$$

şi este continuă,

$$\textit{există } M > 0 \textit{ astfel încât } u_{\varepsilon+1}(x_m) \geq \varepsilon \textit{ pentru } m \geq M.$$

Notăm că, întrucât

$$u \geq u_{\varepsilon+1} \text{ } \textit{în} \text{ } \Omega,$$

avem

$$u(x_m) \geq \varepsilon, \ m \geq M.$$

Aşadar, $u(x_m) \to \infty$ *când* $m \to \infty$. Deci, avem $u(x) \to \infty$ *când* $x \to \partial\Omega$. Acesta reprezintă finalul rezultatelor de bază. ■

Suntem în măsură să demonstrăm teoremele principale ale capitolului. Rezultatele sunt publicate în referinţa [31].

7.3 Rezultate principale

Rezultatele principale obţinute sunt însumate în următoarele teoreme.

Teorema 7.3.1 *(vezi şi [71]) Dacă b satisface (b1), (b2) şi Ω este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2 al lui $\mathbb{R}^N$ atunci*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = b(x) \text{ în } \Omega, \\ v > 0 \text{ în } \Omega, \\ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

are o unică soluţie slabă $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Mai mult, există constantele $l_1 \geq k_1 > 0$, astfel încât

$$k_1 d(x) \leq v(x) \leq l_1 d(x) \text{ pentru } x \in \overline{\Omega}, \tag{7.3.2}$$

unde $d(x)$ reprezintă distanţa de la $x \in \Omega$ la $\partial\Omega$.

Demonstraţie: Cum pentru orice $\varepsilon > 0$, $t \to [t+\epsilon]^{-1}$ este funcţie descrescătoare în $(0,\infty)$ şi

$$u \leq \|u\|_{L^\infty}$$

rezultă că

$$b(x)[u+\epsilon]^{-1} \geq b(x)\left[\|u\|_\infty + \epsilon\right]^{-1},$$

şi, mai mult

$$-\Delta_p u = b(x)[u+\epsilon]^{-1} \geq b(x)[\|u\|_\infty + \epsilon]^{-1},$$

ceea ce înseamnă că

$$\overline{u} = u\left[\|u\|_{L^\infty} + \epsilon\right]^{1/(p-1)}$$

este super-soluţie a problemei (7.3.1). Reamintim că u există din *Lema 7.2.2*. Folosind faptul că $\underline{u} = 0$ este o sub-soluţie a lui (7.3.1) şi metoda super şi sub-soluţiilor avem că problema (7.3.1) are o soluţie $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, care este pozitivă din principiul de maxim. Mai mult, aceasta este unica soluţie a problemei (7.3.1), fapt ce rezultă din principiul slab al comparaţiei. Relaţia (7.3.2) este demonstrată în [71]. ∎

Teorema 7.3.2 *Fie Ω un domeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2. Dacă f şi b satisfac condiţiile (f1), (f2), (b1), (b2) atunci problema (7.1.1) are cel puţin o soluţie explozivă.*

Demonstraţie: Considerăm problema

$$\begin{cases} \Delta_p u = b(x) f(u) & \text{în } \Omega_m, \\ u > 0 & \text{în } \Omega_m, \\ u(x) \to \infty & \text{când } x \to \partial\Omega_m, \end{cases} \tag{7.3.3}$$

unde $\{\Omega_m\}_1^\infty$ este ca în *Lema 7.2.1* şi cu presupunerile pentru $b(x)$, în orice componentă Ω_m. Deoarece $b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, rezultă şi faptul că $b \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_m)$. Din *Lema 7.2.6*, vedem că (7.3.3) are o soluţie $u_m \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega_m)$. Rezultă din *Lemele 7.2.1-7.2.6* că

$$0 < R^{-1}(\overline{v}(x)) \leq u_{m+1} \leq u_m(x) \leq ..., \tag{7.3.4}$$

pentru orice $x \in \Omega_m$.

Observăm că pentru o submulţime compactă B a lui Ω, există m_0 astfel încât $B \subset \Omega_{m_0}$ şi rezultă din (7.3.4) că şirul $\{u_m(x)\}_{m_0}^\infty$ este descrescător pentru $x \in B$ şi este mărginit inferior de $R^{-1}(\overline{v}(x))$ în B.

Ca o concluzie

$$u(x) := \lim_{m\to\infty} u_m(x)$$

există pentru orice $x \in \Omega$. Folosind rezultatele de regularitate pentru soluţii local slabe, *Lema 1.2.7* avem $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ verifică

$$\Delta_p u = b(x) f(u) \text{ în } \Omega.$$

Din (7.3.4) şi

$$R^{-1}(\overline{v}(x)) \to \infty \text{ când } x \to \partial\Omega,$$

vom vedea că u este soluţie a lui (7.1.1) şi demonstraţia este completă. ■

Teorema 7.3.3 *Dacă f şi b satisfac condiţiile (f1), (f2), (b1), (b3) şi $\Omega = \mathbb{R}^N$ atunci problema (7.1.1) are cel puţin o soluţie explozivă totală.*

Demonstraţie: Din *Teorema 7.3.2*, rezultă că următoarea problemă

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) = b(x) f(u(x)) & \text{în } |x| < m, \\ u(x) > 0 & \text{în } |x| < m, \\ u(x) = \infty & \text{când } |x| = m, \end{cases}$$

are o soluţie $u_m \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_m)$ ce satisface

$$u_1(x) \geq u_2(x) \geq ..... \geq u_m(x) \geq u_{m+1}(x) \text{ în } |x| < 1,$$

unde $B_m := \{x \,||x| < m \,, m \in \mathbb{N}\}$.

Pentru a obţine rezultatul din teoremă, este necesar să demonstrăm că

A) $R^{-1}(\overline{v}(x)) \leq u_m(x)$, $\forall x \in B_m$, unde $\overline{v} \in C^1(\mathbb{R}^N)$ este unica soluţie a problemei (7.2.2).

B) $u(x) \to \infty$ *când* $|x| \to \infty$, unde $u := \lim_{m\to\infty} u_m$.

Acum, observăm că *Lema 7.2.4* ne permite să definim o funcţie pozitivă, suficient de netedă pe $[0, \infty)$ prin

$$w_m(x) = \int_{u_m(x)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1/(p-1)}(s)} \; \textit{pentru} \;\; |x| \leq m. \tag{7.3.5}$$

Demonstrăm că

$$w_m(x) \leq \overline{v}(|x|), \;\; R^{-1}(\overline{v}(|x|)) \leq R^{-1}(w_m(x)) = u_m(x),$$

pentru orice $x \in B_m$. Clar, această inegalitate are loc pentru $|x| = m$ unde $w_m = 0$ şi $u_m = \infty$.

Evaluăm *(7.3.5)*, astfel

$$\nabla w_m\left(x\right) = -\frac{1}{f^{1/(p-1)}(u_m)} \nabla u_m\left(x\right). \tag{7.3.6}$$

iar

$$\Delta w_m = -\frac{\Delta u_m}{f^{1/(p-1)}(u_m)} - \left(\frac{1}{f^{1/(p-1)}(u_m)}\right)' \nabla u_m. \tag{7.3.7}$$

Din (1.2.4) obţinem

$$|\nabla w_m\left(x\right))|^{p-2} = \frac{1}{f^{(p-2)/(p-1)}(u_m(x))} \left|\nabla u_m(x)\right|^{p-2}. \tag{7.3.8}$$

Folosind (7.3.7) şi (7.3.8) avem

$$\Delta_p w_m = -\frac{\Delta_p u_m(x)}{f(u_m(x))} + \frac{f'(u_m)}{f^2(u_m)} \left|\nabla u_m\right|^p.$$

De altfel observăm că

$$-\Delta_p w_m(x) = \frac{\Delta_p u_m}{f(u_m)} - \frac{f'(u_m)}{f^2(u_m)} \left|\nabla u_m\right|^p \leq \frac{\Delta_p u_m}{f(u_m)} = b(x) \leq \Phi(r) = -\Delta_p \overline{v}(r).$$

Întrucât

$$\overline{v}(r) > 0 \; \textit{pentru orice} \; x \in B_m \; \textit{cu} \; r = |x|$$

rezultă din *Lema 6.2.3* că

$$w_m(x) \leq \overline{v}(r) \; \textit{pentru orice} \; x \in B_m.$$

În consecinţă,

$$R^{-1}(\overline{v}(r)) \leq u(x) \quad \hat{\imath}n \quad \mathbb{R}^N$$

şi *A)* este demonstrat.

Deoarece

$$\lim_{|x|\to\infty} \overline{v}(|x|) = 0$$

şi

$$\lim_{|x|\to\infty} R^{-1}(\overline{v}\,(|x|)) = \infty,$$

este clar că $u(x) \to \infty$ *când* $|x| \to \infty$. Demonstraţia este completă. ■

7.4 Comentarii

Recent, autorii Shuibo Huang şi Qiaoyu Tian au obţinut în lucrarea [75] comportamentul asimptotic al soluţiei problemei (7.1.1) în mulţimi mărginite ale lui $\mathbb{R}^N$ când aceasta este unică iar pentru $\Omega = \mathbb{R}^N$ Junli Yuan şi Zuodong Yang [138] au stabilit rezultate importante de existenţă, ne-existenţă şi comportament asimptotic al soluţiilor lui (7.1.1).

Bibliografie

[1] Amandine Aftalion and Wolfgang Reichel, *Existence of two boundary blow-up solutions for semilinear elliptic equations*, Journal of Differential Equations, Volume 141, Pages 400-421, Issue 2, 10 December 1997.

[2] Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan, *Existence theory for single and multiple solutions to singular positone value problems*, Journal of Differential Equations, Volume 175, Pages 393-414, Issue 2, 20 September 2001.

[3] Herbert Amann, *Existence and multiplicity theorems for semi-linear elliptic boundary value problems*, Mathematische Zeitschrift, Springer-Verlag, 150, Pages 281-295, 1976.

[4] Aomar Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C.R.A.S., Paris Series I 305 (1987), 725-728.

[5] Aomar Anane, *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p-Laplacien*, Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1988.

[6] Ruthervord Aris, *The mathematical theory of diffusion and reaction in catalysts*, Volumes I (The Theory of the Steady State 444 pp.) and II (Questions of Uniqueness, Stability, and Transient Behavior 217 pp.), Clarendon Press, Oxford, 1975.

[7] David Arcoya, Jose Carmona, Tommaso Leonori, Pedro J. Martinez-Aparicio, Luigi Orsina, Francesco Petitta, *Existence and non-existence of solutions for singular quadratic quasilinear equations*, Journal of Differential Equations, 246, Pages 4006-4042, 2009.

[8] David Arcoya, Sara Barile, Pedro J. Martinez-Aparicio, *Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sign condition*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 350, Pages 401-408, 2009.

[9] Catherine Bandle and Moshe Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior*, Journal d'Analyse Mathématique 58, Pages 9-24, 1992.

[10] Viorel Barbu şi Teodor Precupanu, *Convexitate şi optimizare în spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, Romania, 1986.

[11] G. Barles, *Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p-Laplacian*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 5, 9, No. 1, Pages 65-75, 1988.

[12] Ludwig Bieberbach, *$\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen*, Mathematische Annalen, 77 (1916), 173-212.

[13] Michail Borsuk and Vladimir Kondratiev, *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*, 538 p., "ELSEVIER", North-Holland, Mathematical Library, v. 69, 2006.

[14] Haim Brezis and Luc Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 10, Issue 1, Pages 55-64, January 1986.

[15] Siegfried Carl and Kanishka Perera, *Generalized solutions of singular p-Laplacian problems in $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Studies (in press)

[16] A. Callegari and Adrian Nachman, *Some singular nonlinear differential equations arising in the boundary layer theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 64, Issue 1, Pages 96-105, 1 June 1978.

[17] A. Callegari and Adrian Nachman, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 38, Issue 2, Pages 275-281, April 1980.

[18] Florica-Corina Şt. Cîrstea and Vicenţiu D. Rădulescu, *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 229, Issue 2, Pages 417-425, 15 January 1999.

[19] Ovidiu Cârjă, *Elements of Nonlinear Functional Analysis,* in Romanian, Editura Universitatii "Al.I. Cuza" Iasi, 1998.

[20] Jan H. Chabrowski and Manfred König, *On entire solutions of elliptic equations with a singular nonlinearity*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Pages 643–654, Vol. 31, No. 4, 1990.

[21] Karim Chaib, *Quelques résultats sur les systčmes d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien*, Thčse, Université Paul Sabatier - Toulouse III - (2002-04-23).

[22] Xiaojuan Chai, Weisheng Niu and Peihao Zhao, *The existence and non-existence of positive solutions to a singular quasilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis 71, Pages 3257-3266, 2009.

[23] Subrahmanyan Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure,* Dover, New York, 1957, corrected republication of original (1939) edition, ISBN: 0486604136 v.

[24] Subrahmanyan Chandrasekhar, On Stars, *Their Evolution and Their Stability*, Nobel lecture, 8 December, 1983

[25] Kuo-Shung Cheng and Wei-Ming Ni, *On the structure of the conformal scalar curvature equation on* $\mathbb{R}^N$, Indiana University Mathematics Journal, Volume 41, No. 1, 1992.

[26] Dragoş-Pătru Covei, *Existence and uniqueness of positive solutions to a quasilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Differential Equations, No. 139, Pages 1-15, 2005.

[27] Dragoş-Pătru Covei, *Existence of positive solution to a quasilinear elliptic problem in* R^N, Surveys in Mathematics and its Applications, Volume 1, Pages 111 –116, 2006.

[28] Dragoş-Pătru Covei, *A remark to a quasilinear problem in* $\mathbb{R}^N$, Proceedings of MENP-4 (4th International Colloquium Mathematics in Engineering and Numerical Physic), pp. 193-196, 978-973-718-761-1, Bucureşti, October 2006.

[29] Dragoş-Pătru Covei, *Existence and asymptotic behavior of positive solution to a quasilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 69, Issue 8, Pages 2615-2622, 15 October 2008.

[30] Dragoş-Pătru Covei, *Non-existence result for radially symmetric solutions to the Lane-Emden-Fowler equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 70, Issue 1, Pages 2615-2622, 1 January 2009.

[31] Dragoş-Pătru Covei, *Large and Entire Large Solution for a Quasilinear Problem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 70, Issue 4, Pages 1738-1745, 15 February 2009.

[32] Dragoş-Pătru Covei, *A Lane-Emden-Fowler Type Problem With Singular Nonlinearity*, Journal of Mathematics of Kyoto University, Reference ID: JMKU0490206, Volume 49, No. 2, Article 6, Pages 325-338, 2009.

[33] Dragoş-Pătru Covei, *Existence and asymptotic behavior of solution to a quasilinear singular elliptic problem*, 6th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, May 25–29, 2009.

[34] Dragoş-Pătru Covei, *Existence and uniqueness of solutions for the Lane, Emden and Fowler type problem*, Manuscript aflat sub recenzie în Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications.

[35] Dragoş-Pătru Covei, *Existence of solutions to quasilinear elliptic problems with boundary blow up*, acceptat în: International Conference of Sciences 2009 (ICS2009), Mathematics and Computer Science Session, Baile Felix, Oradea, Romania, from 12-14 November 2009.

[36] Michael G. Crandall, Paul H. Rabinowitz and Luc Charles Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, Communications in Partial Differential Equations*, Volume 2, Issue 2, Pages 193-222, 1977.

[37] Shangbin Cui, *Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Analysis, Volume 41, Issues 1-2, Pages 149-176, July 2000.

[38] Robert Dalmasso, *Solutions d'equations elliptiques semi-lineaires singulieres*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Volume 153, Number 1 / December, Pages 191-201, 1988.

[39] Lucio Damascelli, *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results,* Annales de

l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire, Section C, Tome 15, no. 4 Pages 493-516, 1998.

[40] Lucio Damascelli and Berardino Sciunzi, *Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplace equations*, Journal of Differential Equations, Volume 206, Issue 2, Pages 483-515, 15 November 2004.

[41] Emmanuele DiBenedetto, $C^{1,\alpha}$*- local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Volume 7, Issue 8, Pages 827-850, 1983.

[42] George Dincă, *Metode variaţionale şi aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[43] Serge Dumont, Louis Dupaigne, Olivier Goubet and Vicentiu Radulescu, *Back to the Keller-Osserman condition for boundary blow-up solutions*, Advanced Nonlinear Studies, Volume 7, Pages 271-298, 2007.

[44] Yihong Du, *Order Structure and Topological Methods in nonlinear partial differential equations*, World Scientific, pp. 200, Pub. date: Jan 2006, ISBN 981-256-624-4.

[45] Teodora-Liliana Dinu, *Entire solutions of sublinear elliptic equations in anisotropic media*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 322, Issue 1, Pages 382-392, 1 October 2006.

[46] Teodora-Liliana Dinu, *Entire positive solutions of the singular Emden-Fowler equation with nonlinear gradient term*, Results in Mathematics, Pges 96-100, 2003.

[47] Jesús Ildefonso Diaz, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries,* Pitman Research Notes in Mathematics, 106, 1985.

[48] Jesús Ildefonso Diaz and J. E. Saà, *Existence et unicite de solutions positives pour certaines equations elliptiques quasilineaires*, CRAS 305 Serie I, Pages 521-524, 1987.

[49] Pavel Drabek, *The p-Laplacian – mascot of nonlinear analysis*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Proceedings of Equadiff 11, Vol. LXXVI, 1, Pages 85–9, 2007.

[50] Allan L. Edelson, *Entire solutions of singular elliptic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 139, Issue 2, Pages 523-532, 1 May 1989.

[51] Jacob Robert Emden, *Gaskugeln: Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*, Leipzig, B. G. Teubner, 1907.

[52] Jacob Robert Emden, *Thermodynamik der Himmelskörper*, In: Encykl. Math. Wissensch, Bd 6, 2. Teil, 2. Hälfte, Leipzig, B. G. Teubner, 1925.

[53] Liao Bi-Feng, *Existence of positive solutions to a quasilinear elliptic problem*, Journal of Liaoning University (Natural Science Edition), ISSN 1000-5846, 2006-04-30.

[54] Ralph Howard Fowler, *Further studies on Emden's and similar differential equations*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 2, Pages 259–287, 1931.

[55] Ralph Howard Fowler, *The solution of Emden's and similar differential equations*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 91, Pages 63-91, 1930.

[56] Wei Jie Feng and Xi Yu Liu, *Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, Acta Mathematica Sinica, English Series, December, Vol.20, Pages 983–988, No.6, 2004.

[57] Dong Ye and Feng Zhou, *Invariant criteria for existence of bounded positive solutions*, Discrete and Continous Dynamical Systems-Series A, Volume: 12, Number 3, Pages 413-424, March 2005.

[58] Bruno Franchi, Ermanno Lanconelli and James Serrin, *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in* $\mathbb{R}^N$, Advances in Mathematics, 118, Pages 177-243, 1996.

[59] Jorge García-Melián, *Large solutions for an elliptic system of quasilinear equations*, Journal of Differential Equations 245, Pages 3735–3752, 2008.

[60] Jesus Garcia Azorero and Ireneo Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-laplacian nonlinear eigenvalues*, Communications in Partial Differential Equations, Volume 12, No. 12, Pages 1389–1430, 1987.

[61] Leszek Gasiński and Nikolaos S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Series in Mathematical Analysis and Applications Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan, Volume 9, Taylor & Francis Group, Published in 2005 by Chapman & Hall/CRC.

[62] Iffland Georges, *Itérations monotones dans un espace de Banach ordonné et applications aux équations de Thomas-Fermi et de Lane-Emden-Fowler*, Theses.

[63] Marius Ghergu and Vicenţiu Rădulescu, *Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 333, Issue 1, Pages 265-273, 1 September 2007.

[64] David Gilbarg and Neil Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, Reprint of the 1998 Edition, 1998.

[65] Jose Valdo Goncalves, Carlos Alberto P. Santos and Liliane de Almeida Maia, *Singular nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Abstract and Applied Analysis,Volume 3, Number 3-4, Pages 411-423, 1998.

[66] Jose Valdo Goncalves and Carlos Alberto P. Santos, *Positive solutions for a class of quasilinear singular equations*, Electronic Journal of Differential Equations, No. 56, Pages 1-15 2004.

[67] Jose Valdo Goncalves and Carlos Alberto P. Santos, *Existence and asymptotic behavior of non-radially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Volume 65, Issue 4, Pages 719-727, 15 August 2006.

[68] Jose Valdo Goncalves and Carlos Alberto P. Santos, *Singular elliptic problems: Existence, non-existence and boundary behavior*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 66, Issue 9, Pages 2078-2090, 1 May 2007.

[69] Jose Valdo Goncalves and Fernando Kennedy da Silva, *Solutions of quasilinear elliptic equations in R^N decaying at infinity to a non-negative number*, Complex Variables and Elliptic Equations, DOI: 10.1080/17476930802657608, 04 March 2009.

[70] Jose Valdo Goncalves and Fernando Kennedy da Silva, *Existence and nonexistence of ground state solutions for elliptic equations with a convection term*, Nonlinear Analysis, 2009, doi:10.1016/j.na.2009.07.022.

[71] Zong Ming Guo and Jeff R.L. Webb, *Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 124A, Pages 189-198, 1994.

[72] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood and George Pólya (Pólya György), *Inequalities,* Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[73] Eberhard Friedrich Ferdinand Hopf, *A remark on linear elliptic differential equations of second order*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 3, No. 5, Pages 791–793, 1952.

[74] Eberhard Friedrich Ferdinand Hopf, *Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sitz. Ber. Preuss, Akad. Wissensch. Berlin, Math. Phys. Kl., 19 (1927), 147-152.

[75] Shuibo Huang and Qiaoyu Tian, *Asymptotic behavior of large solutions to p-Laplacian of Bieberbach Rademacher type*, Nonlinear Analysis (2009), doi:10.1016/j.na.2009.04.064

[76] Petru Jebelean, *Metode de analiză neliniară cu aplicaţii în probleme la limită cu p-Laplacian*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara 2001.

[77] Petru Jebelean, *Probleme la limită eliptice-Capitole speciale de EDP*, Editura de Vest, Timişoara, 2008.

[78] Zhiren Jin, *Solutions for a class o singular semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 31, Issue 34, Pages 475-492, 1998.

[79] Jürgen Jost, *Partial Differential Equations*, This book is an expanded translation of the original German version, Partielle Differentialgleichungen, published by Springer-Verlag Heidelberg in 1998.

[80] Joseph B. Keller, *Electrohydrodynamics I. The Equilibrium of a Charged Gas in a Container*, Journal of Rational Mechanics and Analysis, Volume 5, Nomber 4, 1956.

[81] Joseph B. Keller, *On solution of* $\Delta u = f(u)$, Communications on Pure and Applied Mathematics, 10 (1957), 503-510.

[82] Satzanad Kichenassamz and Joel Smoller, *On the existence of radial solutions of quasi-linear elliptic equations*, Nonlinearity, Nomber 3, Pages 677-694, 1990.

[83] Stefan Krömer and Markus Lilli, *Branches of positive solutions of quasilinear elliptic equations on non-smooth domains*, Nonlinear Analysis, Volume 64, Issue 10, Pages 2183-2202, 15 May 2006.

[84] Takasi Kusano and Charles A. Swanson, *Entire positive solutions of singular semilinear elliptic equations*, Japan Journal of Mathematics, 11, Pages 145-155, 1985.

[85] Takasi Kusano and Charles A. Swanson and Hiroyuki Usami, *Pairs of positive solutions of qualilinear elliptic equations in exterior domains*, Pacific Journal of Mathematics, Volume 120, Nomber 2, 1985.

[86] Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and Nina Nikolaevna Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, London, 1968.

[87] Alan V. Lair, *A necessary and sufficient condition for existence of large solutions to semilinear elliptic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 240, Issue 1, Pages 205-218, 1 December 1999.

[88] Alan V. Lair and Aihua W. Shaker, *Entire solutions of a singular semilinear elliptic problem,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 200, Issue 2, Pages 498-505, 1 June 1996.

[89] Alan V. Lair and Aihua W. Shaker, *Classical and Weak Solutions of a Singular Semilinear Elliptic Problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 211, Pages 371-385, 1997.

[90] Alan V. Lair and Aihua W. Wood (Shaker), *Large solutions ofsemilinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis 37, Pages 805–812, 1999.

[91] John Edensor Littlewood, *Some Problems in Real and Complex Analysis*, Heath Mathematics Monographs, Lexington, MASS, 1968.

[92] Godfrey Harold Hardy, *Note on a Theorem of Hilbert*, Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), 314–317.

[93] Jonathan Homer Lane, *On the theoretical temperature of the sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment*, American Journal of Science and Arts, (2) 4, Pages 57-74, 1869.

[94] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions, *Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints; the model problem*, Mathematische Annalen, 283, Pages 583-630, 1989.

[95] Alan C. Lazer and P. Joseph McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem*, Proceedings of the American Mathematical Society, 111, Pages 721-730, 1991.

[96] Alan C. Lazer and P. Joseph McKenna, *On a problem ofBieberbach and Rademacher*, Nonlinear Analysis 21, Pages 327–335, 1993.

[97] An Le, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian*, Nonlinear Analysis,64 (2006) 1057-1099.

[98] Gary M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Volume 12, Issue 11, Pages 1203-1219, November 1988.

[99] Peter Lindqvist, *On the equation* $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda u\,|u|^{p-2} = 0$, Proceedings of the American Mathematical Society, 109, Pages 157-164, 1990.

[100] Peter Lindqvist, *A nonlinear eigenvalue problem,* Lectures at the "Minicorsi di Analisi Matematica" at Padova in June 2000.

[101] Jacques-Louis Lions, *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[102] Charles Loewner and Louis Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, Contributions to Analysis, Academic Press, New York, Pages 245-272, 1974.

[103] Khalifa El. Mabrouk, *Positive Solutions to Singular Semilinear Elliptic Problems*, Positivity, Birkhauser Basel, Volume 10, Number 4, Pages 665-680 (16), November 2006.

[104] Jerk Matero, *Quasilinear elliptic equations with boundary blow-up*, Journal D'Analyse Mathèmatique, Volume 69, Pages 229-247, 1996.

[105] Jerk Matero, *Nonlinear elliptic problems with boundary blow-up*, Uppsala Dissertations in Mathematics, 1997.

[106] Mihail Megan, *Calcul Diferenţial şi integral în* $\mathbb{R}^p$, Timişoara, Note de curs.

[107] Mihail Megan, *Analiză matematică*, Volumul 1, Ediţia a II-a, Editura Mirton, Timişoara, 2003.

[108] S. G. Mihlin, *Ecuaţii liniare cu derivate parţiale,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[109] Sorin Daniel Micu, *Introducere în metoda elementului finit*, Universitaria, Craiova, 2005, ISBN 973-742-066-7.

[110] Marcus Moshe, *On solutions with blow-up at the boundary for a class of semilinear elliptic equations*, in G. Buttazzo et al., eds., Developments in Partial Differential Equations and Applications to Mathematical Physics, Plenum Press, New York, Pages 65–77, 1992.

[111] Ahmed Mohammed, *Existence and asymptotic behavior of blow-up solutions to weighted quasilinear equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 298, Issue 2, Pages 621-637, 15 October 2004.

[112] Wei-Ming Ni, *On the elliptic equation* $\Delta u + K(x)u^{(N+2)/(N-2)} = 0$, *its generalizations, and applications in geometry*, Indiana University Mathematics Journal, Volume 31, Nomber 4, 1982.

[113] Constantin P. Niculescu, *Analiză matematică 3: Calculul integral pe* $\mathbb{R}^N$, Tipografia Universităţii din Craiova, Craiova, 2004.

[114] Ezzat S. Noussair and Charles A. Swanson, *Decaying entire solutions of quasiliniar elliptic equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 31, Pages 415-438, 1998.

[115] Ezzat S. Noussair, *On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Journal of Differential Equations 34, Pages 482-495, 1979.

[116] Stanislav Ivanovich Pohozaev (Pokhozhaev), *The Dirichlet problem for the equation* $\Delta u = u^2$, Doklady Acad Sci. USSR, 136, (1960), no. 3, 769-772. English translation: Soviet. Mathematics Doklady, 1, Pages 1143-1146, 1961.

[117] Robert Osserman, *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$, Pacific Journal of Mathematics 7, Pages 1641-1647, 1957.

[118] Ireneo Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, International center for theoretical physics, Trieste, 1997.

[119] Kanishka Perera and Elves Silva, *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, Journal of Mathematics Analysis and Applications, 323, Pages 1238–1252, 2006.

[120] Kanishka Perera and Elves Silva, *On singular p-Laplacian problems*, Differential Integral Equations, Volume 20 , Nomber 1, Pages 105-120, 2007.

[121] M.C. Péllissier and M. Louis Reynaud, *Étude d'un modèle mathématique d'écoulement de glacier*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Sér. I Math. 279, Pages 531-534, 1974.

[122] Vicenţiu D. Rădulescu, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Repografia Universităţii din Craiova, Craiova, Romania, 2005.

[123] Vicenţiu D. Rădulescu, *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods*, Contemporary Mathematics and Its Applications, Volume 6, Hindawi Publishing Corporation, 2008

[124] Hans Rademacher, *Finige besondere probleme partieller Differentialgleichungen*, in : Die Differential und Integralgleichungen der Mechanick und Physik, I, 2nd ed., Rosenberg, New York, Pages 838-845, 1943.

[125] Ioan A. Rus, Adrian-Olimpiu Petrusel and Gabriela Petrusel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, September 2008.

[126] Shigeru Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e sèrie, tome 14, no. 3, Pages 403-421, 1987.

[127] Aihua W. Shaker, *On singular semilinear elliptic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 173, Issue 1, Pages 222-228, February 1993.

[128] Junping Shi and Miaoxin Yao, *On singular nonlinear semilinear elliptic problem*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 128A, Pages 1389-1401, 1998.

[129] Ralph E. Showalter and Noel J. Walkington, *Diffusion of fluid in a fissured medium with microstructure*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Volume 22, Issue 6, Pages. 1702-1722, September 1991.

[130] Zhou Wen-Shu, *Existence and multiplicity of weak solutions for singular semilinear elliptic equation*, Journal of mathematical analysis and applications, 346, Pages 107-119, 2008.

[131] Shuangping Tao and Zhijun Zhang, *On the existence of explosive solutions for semilinear elliptic problems,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 48, Issue 7, Pages 1043-1050, March 2002.

[132] Peter Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, Journal of Differential Equations, Volume 51, Issue 1, Pages 126-150, January 1984.

[133] Peter Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points,* Communications in Partial Differential Equations, 8(7), Pages, 773-817 1983.

[134] Juan Louis Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Applied Mathematics and Optimization, 12, Pages 191-202, 1984.

[135] Sun Yijing and Li Shujie, *Structure of ground state solutions of singular semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 55, Issue 4, Pages 399-417, November 2003.

[136] Nina Ural'tseva, *Degenerate quasilinear elliptic systems*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov 7, Pages 184-222, 1968.

[137] Hongtao Xue and Zhijun Zhang, *A Remark on Ground State Solutions for Lane-Emden-Fowler Equations with a Convection Term*, Electronic Journal of Differential Equations, No. 53, Pages 1-10, 2007.

[138] Junli Yuan and Zuodong Yang, *Existence, non-existence and asymptotic behaviour of blow-up entire solutions of quasi-linear elliptic equations*, Complex Variables and Elliptic Equations, Volume 54, Issue 1, Pages 41 - 55, January 2009.

[139] Zhijun Zhang, *A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 215, Pages 579-582, 1997.

[140] Zhijun Zhang, *A remark on the existence of positive entire solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 67, Issue 1, Pages 147-153, 1 July 2007.

[141] Zhijun Zhang, *A remark on the existence of explosive solutions for a class of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 41, Issues 1-2, Pages 143-148, July 2000.

[142] Qihu Zhang, Xiaopin Liu, Zhimei Qiu, *On the boundary blow-up solutions of* $p(x)-$*Laplacian equations with singular coefficient*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 70, Issue 11, Pages 4053-4070, 1 June 2009.

[143] James S. W. Wong, *On the generalized Emden-Fowler equation,* SIAM Review, 17, Pages 339-360, 1975.

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

TEZĂ DE DOCTORAT

CONTRIBUŢII ÎN STUDIUL PROBLEMELOR LA LIMITĂ SEMILINIARE ŞI CVASILINIARE

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Mihail Megan

Doctorand:
Dragoş – Pătru Covei

Timişoara
2009